BÀI TẬP CHƯƠNG 1

Bài tập 1.1. Cho hàm $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \longmapsto \sin x$. Dùng định nghĩa chứng minh $Df(a, b) = \alpha$, với α xác định bởi $\alpha(x, y) = (\cos a)x$.

Bài tập 1.2. Cho hàm $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$|f(x)| \leq \|x\|^2.$$

Chứng minh f khả vi tại $x = 0$ và $Df(0) = 0$.

Bài tập 1.3. Cho hàm $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x|y|}{(x^2+y^2)^2}, & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{nếu } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Tính $D_1f(0, 0)$ và $D_2f(0, 0)$.

(b) Chứng minh f không khả vi tại $(0, 0)$.

Bài tập 1.4. Tìm đạo hàm của các ánh xạ sau:

(a) $f(x, y, z) = x^y,\ x > 0$.

(b) $f(x, y, z) - (x^y, x^2 + z),\ x > 0$.

(c) $f(x, y) = \sin(x \sin y)$.

(d) $f(x, y) = (\sin(xy), \sin(x \sin y), x^y),\ x > 0$.

Bài tập 1.5. Sử dụng ví dụ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} + x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Chứng tỏ rằng điều kiện liên tục trong định lí hàm ngược không thể bỏ được.

Bài tập 1.6. Cho hàm g liên tục trên đường tròn đơn vị $\mathbb{S}^1$ thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} g(0,1) = g(1,0) = 0 \\ g(-x) = -g(x) \end{cases}$$

Xét hàm $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi:

$$f(x) = \begin{cases} \|x\| g\Big(\dfrac{x}{\|x\|}\Big), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

với mọi $x \in \mathbb{R}^2$.

(a) Chứng minh với $x \in \mathbb{R}^2$ cố định cho trước, hàm số

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ h(t) = f(t, x)$$

khả vi trên $\mathbb{R}$.

(b) Chứng minh f không khả vi tại $(0, 0)$ trừ khi hàm $g = 0$.

Bài tập 1.7. Cho hàm $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ khả vi liên tục. Chứng minh rằng f không thể là đơn ánh.

Bài tập 1.8. Cho $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ khả vi lớp C^∞. Chứng minh rằng $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

Bài tập 1.9. Cho $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ là một ánh xạ tuyến tính, chứng minh rằng L liên tục, khả vi tại mọi điểm $x \in \mathbb{R}^n$.

Bài tập 1.10. Chứng minh rằng phép tịnh tuyến và phép vị tự trên $\mathbb{R}^n$ là các ánh xạ liên tục.

Bài tập 1.11. Cho U là một tập mở trong $\mathbb{R}^n$ và $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $m \leq n$ là một ánh xạ thuộc lớp C^1. Giả sử rằng f là một đơn ánh và $f^{-1} : A \longrightarrow U$, với $A = f(U)$ cũng thuộc lớp C^1. Chứng minh rằng m không thể nhỏ hơn n. (Đây là một định lý yếu của Brouwer: Không tồn tại 1 đồng từ một tập mở $U \subset \mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}^m$ với $m < n$).

Bài tập 1.12. Cho $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ là một ánh xạ khả vi, chính qui trên $\mathbb{R}^n$, chứng minh rằng f là một ánh xạ mở.

Bài tập 1.13. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để một ánh xạ trơn F là một vi phôi từ W vào $F(W)$ là F là một đơn ánh và DF không có điểm kì dị trên W.

Bài tập 1.14. Chứng minh rằng không tồn tại 1 vi phôi từ một tập mở của $\mathbb{R}^n$ vào một tập mở của $\mathbb{R}^m$ nếu $m < n$.

BÀI TẬP CHƯƠNG 2

Bài tập 2.1. Hãy xác định vết của các đường tham số sau:

(a) (Đường hình số 8), xác định bởi $c(t) = (\sin t, \sin 2t)$

(b) (Đường cubic), xác định bởi $c(t) = (t, t^2, t^3)$

Bài tập 2.2. Tìm một đường tham số $\alpha(t)$ mà vết là đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ sao cho $\alpha(t)$ chạy quanh đường tròn cùng chiều kim đồng hồ và $\alpha(0) = (1, 0)$.

Bài tập 2.3. Cho đường tròn tham số $\alpha(t)$ không đi qua gốc. Giả sử $\alpha(t_0)$ là điểm trên vết của gần với gốc tọa độ nhất. Hãy chứng minh rằng vector $\alpha(t_0)$ trực giao với vector $\alpha'(t_0)$.

Bài tập 2.4. Giả sử $\alpha(t)$ là đường tham số mà $\alpha''(t) = 0$ với mọi t. Chúng ta có thể kết luận gì về $\alpha(t)$?

Bài tập 2.5. Cho đường tham số $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ và $\overrightarrow{v}$ là vector cố định. Giả sử rằng $\alpha'(t_0)$ trực giao với $\overrightarrow{v}$ với mọi $t \in I$ và $\alpha(0)$ cũng trực giao với $\overrightarrow{v}$. Chứng minh rằng với mọi $t \in I$, $\alpha(t_0)$ trực giao với $\overrightarrow{v}$.

Bài tập 2.6. Cho đường tham số $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, với $\alpha'(t) \neq 0,\ \forall t \in I$. Hãy chứng minh rằng $|\alpha(t)| = a$ (a là hằng số khác không) khi và chỉ khi $\alpha(t)$ trực giao $\alpha'(t)$ với mọi $t \in I$.

Bài tập 2.7. Vết của các đường tham số sau nằm trên những mặt quen thuộc nào.

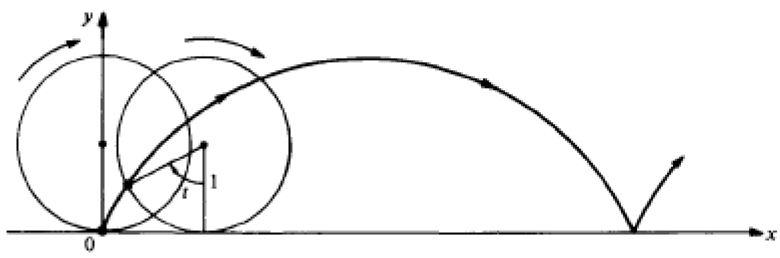
(a) $c : t \mapsto \left(at\cos t\,,\ at\ \sin\ t\,,\ \dfrac{a^2t^2}{2} \right)$

(b) $c : t \mapsto (\sin\ 2t\,,\ 1 - \cos 2\,t\,,\ 2\cos t)$

Bài tập 2.8. Hãy chứng minh rằng các tiếp tuyến của đường tham số $\alpha\,(t) = (3\,t\,,\ 3\,t^2\,,\ 2\,t^3)$ tạo một góc không đổi với đường thẳng cố định $y = 0$; $z = x$.

Bài tập 2.9. Một đĩa tròn bán kính 1 trong mặt phẳng Oxy lăn không trượt dọc theo trục Ox. Khi đó một điểm nằm trên biên của đĩa vạch ra một đường cong gọi là đường Cycloid (Hình 2.0.1).

(a) Hãy tìm một tham số hoá của đường Cycloid và hãy xác định các điểm kỳ dị.



Hình 2.0.1: *Đường cycloid*

(b) Tính độ dài một của đường Cycloid (ứng với một vòng quay của đĩa).

Bài tập 2.10. Tính độ dài của các đường tham số phẳng sau trên đoạn [A, B]

(a) $c : t \mapsto \big(t\,,\, t^2\big)$

(b) $c : t \mapsto (t\,,\, \ln\, t)$

(c) $c : t \mapsto \left(t\,,\, \cosh\dfrac{t}{a}\right)$

(d) $c : t \mapsto (a\, \sin t\,,\, a\, (1 - \cos t)) \quad a > 0$

(e) $c : t \mapsto \big(a\,(\ln\, \tan\frac{t}{2} + \cos t)\,,\, a\, \sin\, t\big) \quad a > 0.$

Bài tập 2.11. Tính độ dài của các đường tham số sau:

(a) $c \;:\mapsto\; \left(a\, (t - \sin\, t)\,,\, a\,(1 - \cos t)\,,\, 4\,a\cos\dfrac{\mathrm{t}}{2}\right)$, giữa hai giao điểm của đường với mặt phẳng $y = 0$;

(b) $c : t \mapsto \big(\cos^3 t\,,\, \sin^3 t\,,\, \cos 2\mathrm{t}\big)$ một vòng khép kín;

(c) $c : t \mapsto (a\, \cosh\, t\,,\, a\, \sinh\, t\,,\, at)$, trong khoảng $[0, b]$;

Bài tập 2.12. Tính độ dài của phần đường cong.

$$\begin{cases} x^3 = 3a^2 y \\ 2xz = a^2 \end{cases}$$

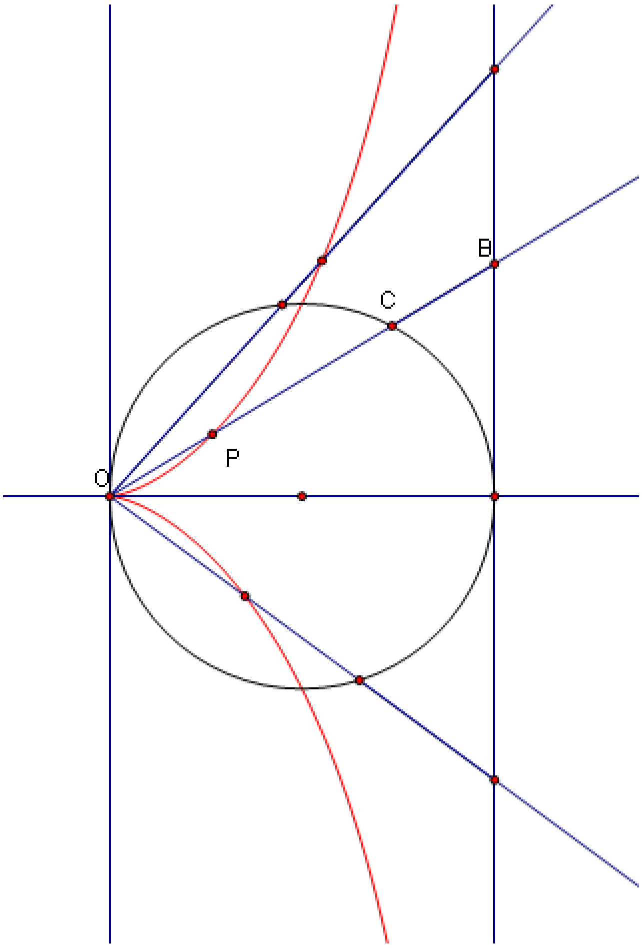
giữa hai mặt phẳng $y = a/3$ và $y = 9a$, với $a > 0$.

Bài tập 2.13. Cho $OA = 2a$, $a > 0$ là đường kính của đường tròn (S), hai đường Oy và AV là hai tiếp tuyến của (S) tại O và A. Tia Or cắt đường tròn (S) tại C và AV tại B. Trên OB lấy điểm P sao cho $OP = CB$. Nếu ta quay tia Or quanh điểm O thì các điểm P vẽ nên đường cong gọi là đường xixôit của Diocles (cissoid of Diocles). Chọn OA làm trục hoành và Oy là trục tung. Hãy chứng minh rằng

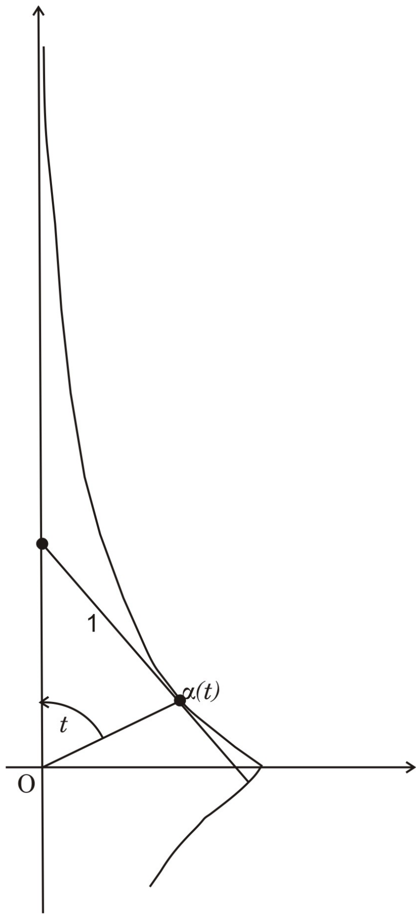
(a) Vết của đường

$$\alpha(t) = \left(\frac{2at^2}{1+t^2}, \frac{2at^3}{1+t^2}\right), t \in \mathbb{R}$$

là đường xixôit của Diocles ($t = \tan\theta$ xem Hình 2.0.2)



Hình 2.0.2: *Đường xixôit của Diocles (cissoid of Diocles)*



Hình 2.0.3: *Đường Tractrix*

(b) Gốc tọa độ $O(0,0)$ là điểm kì dị của đường xixôit.

(c) Khi $t \longrightarrow \infty$ thì đường cong dần về đường thẳng $x = 2a$ và $\alpha'(t) \longrightarrow (0, 2a)$. Do đó, khi $t \longrightarrow \infty$ thì đường cong và tiếp tuyến của nó dần về đường thẳng $x = 2a$. Ta gọi đường thẳng $x = 2a$ là *đường tiệm cận* (asymptote) của đường xixôit.

Bài tập 2.14. Cho $\alpha : (0\,,\,\pi) \to \mathbb{R}^2$ được xác định bởi tham số

$$\alpha\,(t) = \left(\sin\,t\,,\cos t + \ln\,\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right) \tag{2.0.1}$$

ở đây t là góc giữa trục Oy với vector $\alpha'(t)$. Vết của α được gọi là đường tractrix. (Hình 2.0.3). Hãy chứng minh rằng:

(a) α là đường tham số khả vi, chính qui ngoại trừ $t = \pi/2$.

(b) Khoảng cách từ tiếp điểm đến giao điểm của tiếp tuyến với trục Oy luôn bằng 1.

Bài tập 2.15. Cho đường tham số $\alpha : (-1\,,\,+\infty) \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi :

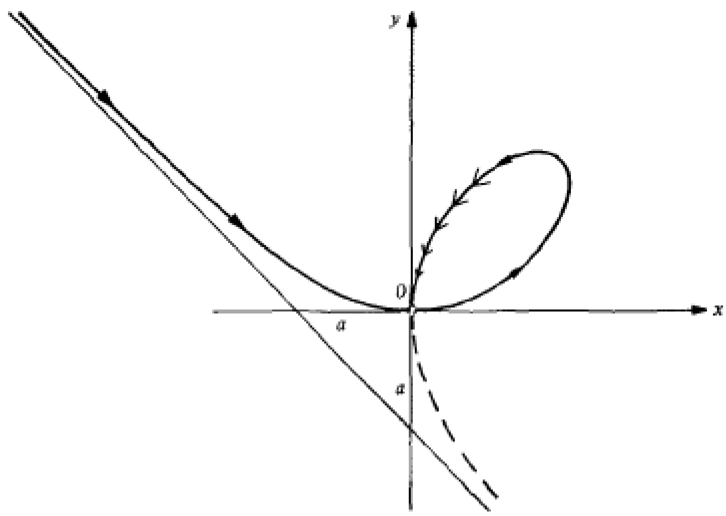
$$\alpha(t) = (\frac{3at}{1+t^3}, \frac{3at^2}{1+t^3}) \tag{2.0.2}$$

Chứng minh rằng:

(a) Tại $t = 0$, α' tiếp xúc với trục Ox.

(b) Khi $t \longrightarrow \infty$, thì $\alpha(t) \to (0,0)$ và $\alpha'(t) \to (0,0)$.

(c) Lấy đường cong với hướng ngược lại. Khi đó nếu $t \to -1$. Đường cong và tiếp tuyến của nó tiến tới đường thẳng $x + y + a = 0$. Hợp của 2 đường vừa mô tả là 1 đường đối xứng qua đường thẳng $y = x$ và được gọi là lá Descartes (folium of Descartes) (Hình 2.0.4)

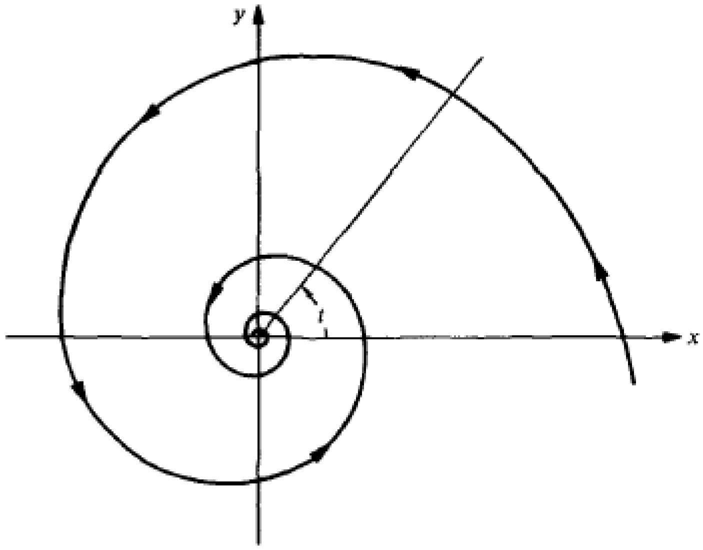


Hình 2.0.4: *Lá Descartes*

Bài tập 2.16. Cho đường tham số $\alpha(t) = (ae^{bt}\cos t, ae^{bt}\sin t)$, $t \in \mathbb{R}$ a và b là hằng số, $a > 0, b < 0$.

(a) Hãy chứng tỏ rằng khi $t \to \infty$, thì $\alpha(t)$ tiến dần tới gốc O và xoắn quanh gốc O, vì thế vết của nó (Hình 2.0.5) được gọi là đường xoắn logarithm (logarithmic Spiral).

(b) Hãy chứng tỏ rằng $\alpha'(t) \to (0,0)$ khi $t \to \infty$ và $\lim\limits_{t\to\infty} \int\limits_{t_0}^{t} |\alpha'(t)|dt$ là hữu hạn; nghĩa là α có độ dài hữu hạn trên đoạn $[t_0, \infty)$.



Hình 2.0.5: *Đường xoắn logarithm*

Bài tập 2.17. Cho $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ là một đường cong đơn, liên tục (thuộc lớp C^0). Chúng ta nói rằng α có *tiếp tuyến yếu* (weak tangent) tại t_0 nếu đường thẳng xác định bởi $\alpha(t_0+h)$ và $\alpha(t_0)$ có cùng một vị trí tới hạn khi $h \to 0$. Chúng ta nói rằng α có tiếp tuyến mạnh (strong tangent) tại $t = t_0$ nếu đường thẳng xác định bởi $\alpha(t_0+h)$ và $\alpha(t_0+k)$ có cùng một vị trí tới hạn khi $h, k \to 0$. Chứng tỏ rằng:

(a) Đường tham số $\alpha(t) = (t^3, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$, có tiếp tuyến yếu nhưng không có tiếp tuyến mạnh tại $t = 0$.

(b) Nếu đường tham số $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ thuộc lớp C^1 và chính qui tại $t = t_0$ khi đó α có tiếp tuyến mạnh tại $t = t_0$.

(c) Đường tham số α cho bởi

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t^2, t^2) & \text{nếu } t \geq 0 \\ (t^2, -t^2) & \text{nếu } t \leq 0 \end{cases}$$

thuộc lớp C^1 nhưng không thuộc lớp C^2. Hãy vẽ phác thảo đường cong và các véctơ tiếp xúc của nó.

Bài tập 2.18. (Đoạn thẳng là ngắn nhất). Cho $c : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ là đường tham số, lấy $[a, b] \subset I$ và đặt $\alpha(a) = p$, $\alpha(b) = q$.

(a) Hãy chứng tỏ rằng với mọi véc tơ hằng, đơn vị $\overrightarrow{v}$ ($|\overrightarrow{v}| = 1$), ta luôn có

$$(q - p).\overrightarrow{v} = \int_a^b \alpha'(t).\overrightarrow{v} dt \leq \int_a^b |\alpha'(t)| dt.$$

(b) Đặt $\overrightarrow{v} = \dfrac{p - q}{|p - q|}$ và chứng minh rằng

$$|\alpha(b) - \alpha(a)| \leq \int_a^b |\alpha'(t)| dt.$$

Có nghĩa là cung có độ dài ngắn nhất nối p và q là đoạn thẳng.

Bài tập 2.19. Chứng minh rằng đường tham số chính qui phẳng với tham số độ dài cung có độ cong $k = const > 0$ khi và chỉ khi vết của nó là một đường tròn (hoặc là một phần của đường tròn).

Bài tập 2.20. Xác định trường mục tiêu Frenet và tìm độ cong, độ xoắn tại điểm tuỳ ý của các đường tham số sau:

(a) $c(t) = (t^2, 1 - t, t^3)$

(b) $c(t) = (a \cosh t, a \sin t, at)$

(c) $c(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t)$

(d) $c(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t)$

(e) $c(t) = (2t, \ln t, t^2)$

Bài tập 2.21. Cho đường tham số

$$\alpha(s) = \left(a \cos \frac{s}{c}, a \sin \frac{s}{c}, b\frac{s}{c}\right),\ s \in \mathbb{R}$$

với $c^2 = a^2 + b^2$.

(a) Chứng minh rằng tham số s là độ dài cung.

(b) Xác định hàm độ cong và độ xoắn của $\alpha(s)$.

(c) Xác định mặt phẳng mật tiếp của $\alpha(s)$.

(d) Chứng minh rằng đường pháp tuyến $\mathbf{n}(s)$ và đi qua $\alpha(s)$ cắt trục Oz theo một góc bằng $\pi/2$.

(e) Chứng minh rằng tiếp tuyến của α tạo với trục Oz một góc không đổi.

Bài tập 2.22. Tìm các điểm trên đường tham số $c(t) = \Big(a(t - \sin t), a(1 - \cos t), 4a \cos \dfrac{t}{2}\Big), t \in \mathbb{R}$, mà tại đó bán kính cong đạt cực trị địa phương.

Bài tập 2.23. Chứng minh rằng nếu mặt phẳng pháp diện của đường tham số song chính qui trong $\mathbb{R}^3$ tại mọi điểm đều chứa một vector cố định thì cung đã cho là đường phẳng.

Bài tập 2.24.

(a) Một đường tham số chính quy liên thông phẳng $c(t)$ có tính chất là mọi tiếp tuyến luôn đi qua một điểm cố định. Chứng minh rằng vết của α là một đường thẳng hoặc một đoạn của đường thẳng.

(b) Chứng minh rằng nếu vector trùng pháp của một đường tham số song chính qui trong $\mathbb{R}^3$ tại mọi điểm là một vector cố định thì cung đã cho là đường phẳng.

Bài tập 2.25. Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc, mặt phẳng pháp và mặt phẳng mật tiếp của đường cong

$$c(t) = (t^3 - t^{-3} - 1, t^2, t^{-2} - t)$$

tại điểm $c(2)$. Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc, mặt phẳng pháp và mặt phẳng mật tiếp của đường cong

$$c(t) = (t^2 - t^{-3} - 1, t^2 + t, t^{-2} - t)$$

tại điểm $\Big(\dfrac{25}{8}, 2, \dfrac{9}{4}\Big)$.

Bài tập 2.26. Cho đường tham số (helix)

$$c(t) = (a \cos t, a \sin t, bt),\ a > 0,\ b \neq 0.$$

(a) Hãy viết phương trình tiếp tuyến, pháp tuyến chính, trùng pháp tuyến, mặt phẳng mật tiếp, mặt phẳng trực đạc tại một điểm tuỳ ý.

(b) Chứng minh rằng các tiếp tuyến của nó nghiêng một góc không đổi với mặt phẳng $z = 0$, còn các pháp tuyến chính cắt trục Oz.

Bài tập 2.27. Chứng tỏ rằng có thể đưa đường tham số $c : \langle a, b\rangle \longrightarrow \mathbb{R}^n$, với $a, b \in \mathbb{R}$, về đường tham số tương đương $\alpha : \langle 0, 1\rangle \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Bài tập 2.28. Cho $c : I \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (t, f(t), g(t))$, với $f(t), g(t)$ là các hàm trơn, là một đường tham số.

(a) Chứng minh rằng c là đường tham số chính qui.

(b) Tìm vector tiếp xúc của c trong trường hợp $f(t) = \sin t + t^2$ và $g(t) = e^t(1 - t^3)$.

Bài tập 2.29. (điều kiện cần và đủ để đường tham số nằm trên một mặt cầu). Giả sử α là đường cong có $\tau \neq 0$ và $k' \neq 0$. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để vết của α nằm trên một mặt cầu là

$$R^2 + (R')^2T^2 = \text{const}$$

ở đây $R = 1/k$, $T = 1/\tau$ và R' là đạo hàm của R theo s.

Bài tập 2.30. (điều kiện cần và đủ để đường tham số nằm trên một mặt cầu). Cho $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ là là đường tham số song chính qui với tham số độ dài cung. Giả sử $\tau \neq 0$ và $k > 0$

(a) Chứng minh rằng nếu $C = c(I)$ nằm trên mặt cầu a, bán kính r. thì

$$c - a = -\frac{1}{k}\,.\,\mathbf{n} - \left(\frac{1}{k}\right)'.\frac{1}{\tau}.\mathbf{b}$$

Từ đây suy ra $r^2 = \dfrac{1}{k^2} + \left(\left(\dfrac{1}{k}\right)'\dfrac{1}{\tau}\right)^2$

(b) Ngược lại, nếu $\dfrac{1}{k^2} + \left(\left(\dfrac{1}{k}\right)'\dfrac{1}{\tau}\right)^2 = const > 0$ thì $C = c(I)$ nằm trên một mặt cầu.

Bài tập 2.31. Chứng tỏ rằng các đường tham số hóa sau không tương đương

(a) $c_1(t) = (t, 1-t),\ t \in (0,1)$;

(b) $c_2(t) = (\sqrt{\cos t}, \sin t),\ t \in (0, \pi/2)$;

(c) $c_3(t) = (-t, 1-t^2),\ t \in (0,1)$.

Bài tập 2.32. Chứng minh rằng đường cong trong không gian có tiếp tuyến tạo với một đường thẳng cố định một góc không đổi khi và chỉ khi tỉ số giữa độ xoắn và độ cong tại một điểm tùy ý là hằng số.

Bài tập 2.33. Cho $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ là một đường cong tham số hóa tự nhiên có độ cong $k(s) > 0,\ \forall s \in I$. Gọi P là mặt phẳng thỏa hai điều kiện sau:

(a) P chứa tất cả các tiếp tuyến của c tại s_0;

(b) Với mỗi lân cận $J \subset I$ của s_0, luôn tồn tại những điểm của $c(J)$ nằm trong P.

Chứng minh rằng P là mặt phẳng tiếp xúc của c tại s_0.

Bài tập 2.34. Trong trường hợp tổng quát, một đường tham số α được gọi là một helix (xoắn ốc) nếu các tiếp tuyến của α tạo một góc không đổi với một phương cố định. Giả sử rằng $\tau \neq 0$, chứng minh rằng :

(a) α là một đường xoắn ốc nếu và chỉ nếu k/τ là một hàm hằng.

(b) α là một đường xoắn ốc nếu và chỉ nếu các đường pháp tuyến của α song song với một mặt phẳng cố định.

(c) α là một đường xoắn ốc nếu và chỉ nếu các đường trùng pháp tuyến của α tạo một góc không đổi với một phương cố định.

Bài tập 2.35. Cho $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ là một đường cong tham số hóa tự nhiên có độ cong $k(s) > 0,\ \forall s \in I$. Chứng minh rằng

(a) Mặt phẳng tiếp xúc của c tại s_0 chính là giới hạn của các mặt phẳng qua 3 điểm $c(s_0)$, $c(s_0 + h_1)$, $c(s_0 + h_2)$ khi $h_1, h_2 \to 0$.

(b) Giới hạn của các đường tròn đi qua 3 điểm $c(s_0)$, $c(s_0 + h_1)$, $c(s_0 + h_2)$ là một đường tròn nằm trong mặt phẳng tiếp xúc của c tại s_0, có tâm nằm trên pháp tuyến tại s_0 của c và bán kính bằng $1/k(s_0)$. Đường tròn này gọi là đường tròn mật tiếp (osculating circle) của c tại s_0.

Bài tập 2.36. Chứng minh rằng độ dài của đường cong, độ cong và độ xoắn là các khái niệm Euclide (tức là nó bất biến qua phép biến đổi đẳng cự).

Bài tập 2.37. Giả sử rằng tất cả các pháp tuyến của một đường tham số chính qui phẳng luôn đi qua một điểm cố định. Chứng minh rằng đường là một đường tròn hoặc một phần của đường tròn.

Bài tập 2.38. Tìm các đường tham số song chính qui của $\mathbb{R}^3$ mà các mặt phẳng mật tiếp thỏa mãn một trong các điều kiện sau:

(a) Vuông góc với một phương cố định;

(b) Song song với một đường thẳng cố định và tiếp tuyến không song song với đường thẳng đó;

(c) Đi qua một điểm cố định và các tiếp tuyến đi qua điểm đó.

Bài tập 2.39. Chứng minh rằng các tính chất sau của các đường song chính qui định hướng trong $\mathbb{R}^3$ là tương đương:

(a) Tiếp tuyến tạo một góc không đổi với phương cố định;

(b) Pháp tuyến chính song song với một mặt phẳng cố định;

(c) Trùng pháp tuyến tạo một góc không đổi với một phương cố định (với điều kiện độ xoắn khác không tại mọi điểm);

(d) Tỉ số giữa độ cong và độ xoắn là một hàm hằng.

Bài tập 2.40. Một đường tham số chính qui phẳng α có tính chất mọi tiếp tuyến luôn đi qua một điểm cố định. chứng minh rằng vết của nó là một đường thẳng hoặc một đoạn của đường thẳng.

Bài tập 2.41. Xác định đường túc bế và đường thân khai của các đường tham số phẳng sau:

(a) Đường tractrix.

(b) Đường hyperbol.

(c) Đường Cycloid.

Bài tập 2.42. Cho đường tham số $\alpha(t) = (t, \cosh t), t \in \mathbb{R}$.

(a) Hãy chứng tỏ rằng độ cong có dấu của là $k(t) = \dfrac{1}{\cosh^2 t}$

(b) Chứng tỏ rằng đường túc bế của α là $\beta(t) = (t - \sin t \cosh t,\ 2\cosh t)$

Bài tập 2.43. Tìm độ cong (có dấu) của ellipse tại các đỉnh của nó.

Bài tập 2.44. Cho đường tham số hoá $c(t) = (\varphi(t),\ t\varphi(t))$. Hãy tìm điều kiện của để c là một cung thẳng.

Bài tập 2.45. Cho α là một đường cong phẳng, chính qui. Gọi β là đường túc bế của α. Chứng minh rằng

(a) Tiếp tuyến của β tại t_0 là pháp tuyến của α tại t_0.

(b) Xét hai pháp tuyến của α tại hai điểm t_1 và t_2, cho t_1 dần về t_2, hãy chứng minh rằng giao điểm của hai pháp tuyến này dần về một điển nằm trên đường túc bế β.

Bài tập 2.46. Chứng minh rằng độ cong $k(t) \neq 0$ của một đường cong tham số chính qui $c : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ là độ cong của đường cong phẳng $\pi \circ c$, với π là phép chiếu trực giao của α lên mặt phẳng tiếp xúc của c tại t.

Bài tập 2.47. Cho $k(s)$ là một hàm khả vi $\forall s \in I$, hãy chứng tỏ rằng đường tham số phẳng nhận $k(s)$ làm hàm độ cong được cho bởi tham số

$$\alpha\,(t) = \left(\int \cos\theta\,(s)\,ds\ +\ a,\ \int \sin\theta\,(s)\,ds + b\right)$$

với $\theta\,(s) = \int k\,(s)\,ds + \varphi$ và các đướng cong đó được xác định sai khác một phép tịnh tiến theo vectorr $\overrightarrow{v}(a,b)$ và một phép quay góc φ.

Bài tập 2.48. Đường tham số phẳng trong hệ tọa độ cực được xác định bởi tham số $\rho = \rho(\theta)$, $\theta \in [a,b]$. Hãy chứng minh rằng

(a) Độ dài của ρ được xác định bởi công thức

$$l(\rho) = \int_a^b \sqrt{\rho^2 +\ (\rho')^2}d\theta$$

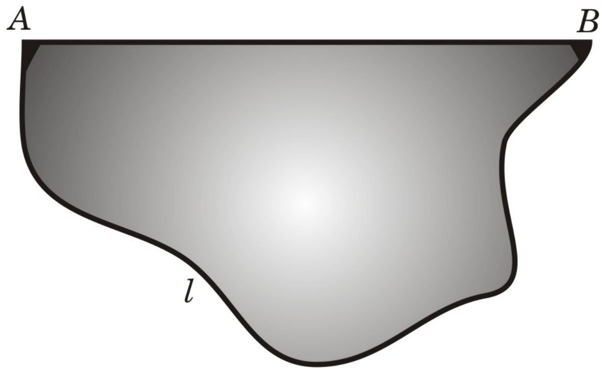
ở đây dấu phẩy là ký hiệu cho đạo hàm theo biếnθ .

(b) Độ cong đại số của $\rho(s)$ được xác định bởi công thức

$$k\,(s) = \frac{2(\rho')^2\ -\ \rho\rho''\ +\ \rho^2}{\left((\rho')^2 -\ \rho^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Bài tập 2.49. Có tồn tại không một đường cong phẳng, đóng có chiều dài bằng 6 cm, bao một miền có diện tích bằng 3 cm^2.

Bài tập 2.50. Cho AB là một đoạn thẳng và l là số thực dương, lớn hơn độ dài của đoạn thẳng AB. Chứng minh rằng đường cong c nối hai điểm A và B, có chiều dài bằng l, và cùng với đoạn thẳng AB bao một miền có diện tích lớn nhất là một cung của đường tròn qua hai điểm A và B. (Hình 2.0.6)



Hình 2.0.6:

Bài tập 2.51. Cho $\alpha(s), s \in I$ là một đường cong phẳng đơn, đóng và lồi. Đường cong $\beta(s) = \alpha(s) + r.\mathbf{n}(s)$ với $r > 0$ được gọi là đường cong song song với α. Chứng minh rằng

(a) $l(\beta) = l(\alpha) + 2\pi r$

(b) $A(\beta) = A(\alpha) + rl + \pi r^2$

(c) $k_\beta(s) = k_\alpha(s)/(1 + r)$

Bài tập 2.52. Cho $\alpha(s)$, $s \in I$ là một đường cong đơn, đóng. Giả sử rằng độ cong $k(s)$ của α thỏa điều kiện $0 < k(s) < c$ với c là một hằng số dương (từ đây suy ra α cong ít hơn đường tròn bán kính 1/c). Chứng minh rằng $l(\alpha) \geq 2\pi/c$.

Bài tập 2.53. Chứng minh rằng nếu α là một đường cong phẳng đơn, đóng và lồi thì nó bao một tập lồi trong mặt phẳng.

Bài tập 2.54. Chứng minh rằng có thể thay giả thuyết *đường cong đơn, đóng* trong bài toán đẳng chu bởi giả thuyết *đường cong đơn, đóng và **lồi**.*

Bài tập 2.55.

(a) Cho α là một đường cong đơn, đóng và lồi. Chứng minh rằng nếu một đường thẳng L cắt α thì hoặc L là một tiếp tuyến của α hoặc L cắt α tại đúng hai điểm.

(b) Sử dụng kết quả này, chứng minh rằng độ đo của tập tất cả các đường thẳng cắt α (không tính số điểm lập) bằng độ dài của đường cong α.

BÀI TẬP CHƯƠNG 3

Bài tập 3.1. Chứng minh rằng mặt trụ $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = 1\}$ là một mặt chính qui và hãy tìm họ các bản đồ mà các lân cận tọa độ phủ nó.

Bài tập 3.2. Tập $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 0, \ x^2 + y^2 \leq 1\}$ có phải là mặt chính qui không? Tập $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 0, \ x^2 + y^2 < 1\}$ có phải là mặt chính qui không?

Bài tập 3.3. Cho $f(x, y, z) = x^2$. Chứng minh rằng 0 không phải là giá trị chính qui của hàm f nhưng $f^{-1}(0)$ lại là một mặt chính qui.

Bài tập 3.4. Cho $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x = y\}$ và ánh xạ $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ được xác định bởi

$$X(u, v) = (u + v, u + v, uv)$$

với $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u > v\}$. Rõ ràng $X(u, v) \subset P$. Có phải X là một tham số hóa của P không?

Bài tập 3.5. Cho hàm $f(x, y, z) = (x + y + z - 1)^2$.

(a) Tìm các điểm tới hạn và xác định giá trị tới hạn của hàm f.

(b) Với giá trị nào của c thì tập $f(x, y, z) = c$ là một mặt chính qui.

(c) Cùng câu hỏi tương tự cho hàm $(x, y, z) = xyz^2$.

Bài tập 3.6. Cho $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ là một mặt chính qui. Chứng minh rằng X là đơn ánh khi và chỉ khi $\{X_u, X_v\}$ độc lập tuyến tính.

Bài tập 3.7. Cho V là một tập mở trong mặt phẳng Oxy. Chứng minh rằng tập

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 0, \ (x, y) \in V\}$$

là một mặt chính qui.

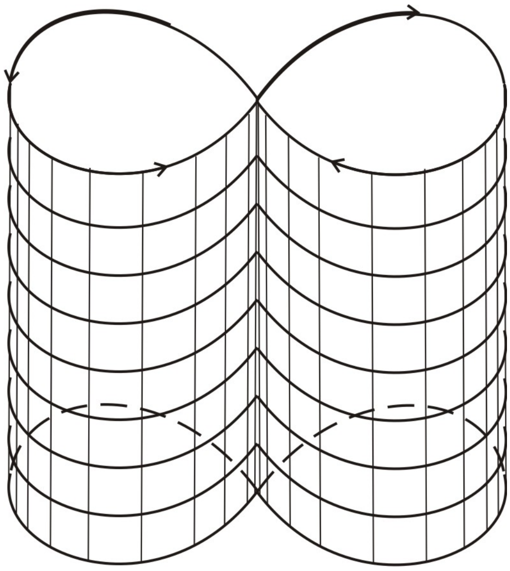
Bài tập 3.8. Chứng minh rằng tập $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = x^2 - y^2\}$ là một mặt chính qui và kiểm tra các ánh xạ sau là các tham số hóa của S.

(a) $X(u, v) = (u + v, u - v, 4uv), \ (u, v) \in \mathbb{R}^2$.

(b) $X(u, v) = (u \cosh v, u \sinh v, u^2), \ (u, v) \in \mathbb{R}^2, u \neq 0$.

Bài tập 3.9. Tìm một tham số hóa của hyperbolic hai tầng $x^2+y^2-z^2=-1$.

Bài tập 3.10. Cho C là một hình số "8" trong mặt phẳng Oxy và S là một mặt trụ đứng trên C (Hình 3.0.1); nghĩa là



Hình 3.0.1:

$$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ (x,y)\in C\}.$$

S có phải là mặt chính qui không?

Bài tập 3.11. Chứng minh rằng $X:U\subset\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3$ được cho bởi

$$X(u,v)=\big(a\sin u\cos v, b\sin u\sin v, c\cos u\big),\ a,b,c\neq 0$$

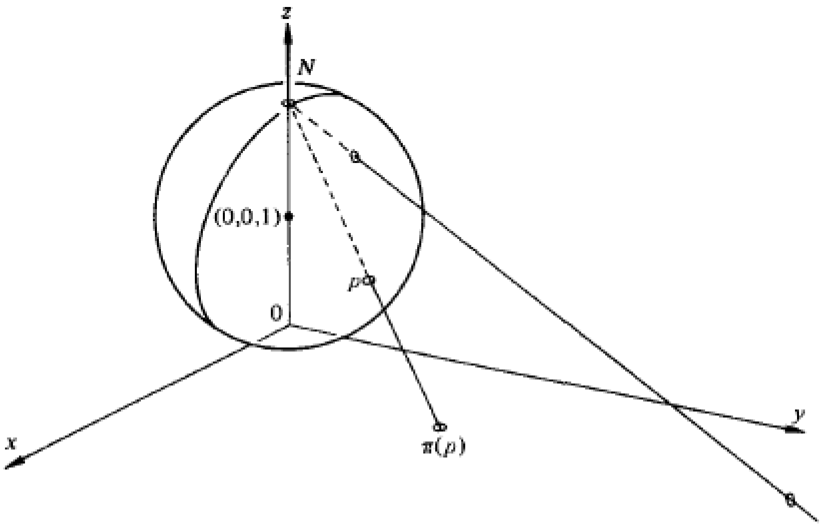
với $0<u<2\pi$, $0<v<2\pi$ là một tham số hóa của ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Mô tả các đường cong $u=\text{const}$ trên ellipsoid.

Bài tập 3.12. Cho $p(t)$ và $q(t)$ là hai điểm di chuyển cùng vận tốc. Điểm p bắt đầu từ điểm $(0,0,0)$ và di chuyển dọc trục Oz và q bắt đầu từ điểm $(a,0,0)$ di chuyển song song trục Oy. Chứng minh rằng đường thẳng nối p và q tạo nên một tập trong $\mathbb{R}^3$ được cho bởi đẳng thức $y(x-a)+xz=0$. Nó có phải là một mặt chính qui không?

Bài tập 3.13. Một phương pháp khác để thành lập các hệ tọa độ địa phương của mặt cầu $\mathbb{S}^2$ là xét mặt cầu $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ và phép chiếu nổi $\pi : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ chiếu mỗi điểm trên mặt cầu $\mathbb{S}^2$ trừ cực bắc $N(0,0,2)$ thành giao điểm của mặt phẳng Oxy với đường thẳng nối cực bắc và điểm p (Hình 3.0.2). Gọi $(u,v) = \pi(x,y,z)$, với $(x,y,z) \in S \setminus \{N\}$ vào $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.



Hình 3.0.2: *Phép chiếu nổi (stereographic projection)*

(a) Chứng minh rằng $\pi^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ được xác định bởi biểu thức

$$\pi^{-1} : \begin{cases} x = \dfrac{4u}{u^2+v^2+4} \\ y = \dfrac{4v}{u^2+v^2+4} \\ z = x = \dfrac{2(u^2+v^2)}{u^2+v^2+4} \end{cases}$$

(b) Chứng minh rằng có thể dùng phép chiếu nổi để phủ mặt cầu $\mathbb{S}^2$ bởi 2 hệ tọa độ địa phương.

Bài tập 3.14. Định nghĩa đường cong chính qui tương tự như mặt chính qui. Chứng minh rằng

(a) Nghịch ảnh giá trị chính qui của hàm khả vi $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ là một đường cong phẳng chính qui. Cho ví dụ một đường cong như thế mà không liên thông.

(b) Nghịch ảnh giá trị chính qui của hàm khả vi $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ là một đường cong chính qui trong $\mathbb{R}^3$. Chỉ ra mối quan hệ giữa mệnh đề này với cách định nghĩa cổ điển của đường cong chính qui là giao của hai mặt chính qui.

(c) Chứng minh rằng tập $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 = y^3\}$ không phải là một đường cong chính qui.

Bài tập 3.15. Cho $\mathbb{S}^2$ là mặt cầu đơn vị trong không gian $\mathbb{R}^3$. Chứng minh rằng ánh xạ

$$A : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2, \ (x, y, z) \longmapsto (-x, -y, -z)$$

là một vi phôi.

Bài tập 3.16. Cho S là một mặt chính qui $\pi : S \longrightarrow \mathbb{R}^2$ biến mỗi điểm p thành hình chiếu trực giao của nó lên mặt phẳng $\mathbb{R}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 0\}$. Ánh xạ π có khả vi không?

Bài tập 3.17. Chứng minh rằng parabolid $(P) : z = x^2 + y^2$ đồng phôi với mặt phẳng $\mathbb{R}^2$.

Bài tập 3.18. Xây dựng một vi phôi từ ellipsoid

$$(E) : \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

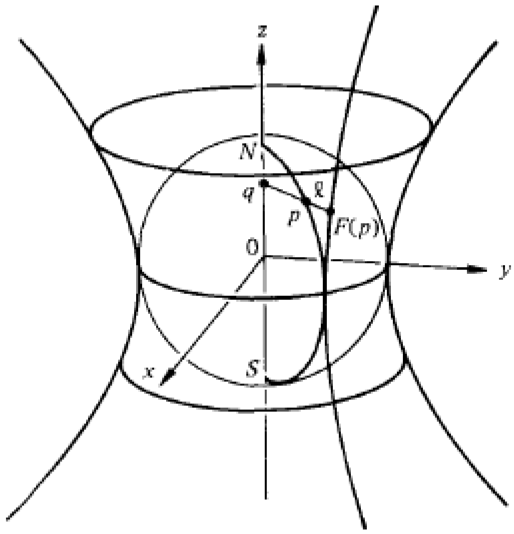
vào mặt cầu đơn vị $\mathbb{S}^2$.

Bài tập 3.19. Cho S là một mặt chính qui, d là hàm khoảng cách từ điểm $p \in S$ đến điểm cố định $p_0 \notin S$, nghĩa là $d : S \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $p \longmapsto |p - p_0|$. Chứng minh rằng hàm f khả vi.

Bài tập 3.20. Chứng minh rằng định nghĩa ánh xạ khả vi giữa hai mặt chính qui không phụ thuộc vào việc chọn tham số.

Bài tập 3.21. Chứng minh rằng quan hệ đồng phôi là một quan hệ tương đương trong tập các mặt chính qui.

Bài tập 3.22. Cho $\mathbb{S}^2$ là mặt cầu đơn vị và $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$. Gọi $N(1, 0, 0)$ và $S(0, 0, -1)$ là cực bắc và cực nam của mặt cầu $\mathbb{S}^2$. Xét ánh xạ $F : \mathbb{S}^2 \setminus \{N \cup S\} \longrightarrow H$ được xác định như bởi: với mỗi $p \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N \cup S\}$ dựng mặt phẳng α qua p vuông góc với trục Oz, cắt trục Oz tại q. Gọi l là tia



Hình 3.0.3:

qp, khi đó $F(p) = l \cap H$ (3.0.3). Chứng minh rằng F là ánh xạ khả vi.

Bài tập 3.23. Cho C là đường cong phẳng nằm về một phía của đường thẳng r và nó cắt r tại hai điểm p, q với điều kiện nào của C thì mặt được sinh ra là mặt tròn xoay mở rộng.

Bài tập 3.24. Chứng minh rằng phép quay mặt tròn xoay S quanh trục của nó là một vi phôi của mặt S.

Bài tập 3.25. Mặt tham số hóa thường được xem là các mặt chính qui ngoài trừ hữu hạn điểm và hữu hạn đường thẳng. Xét C là vết của một đường tham số chính qui $\alpha : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mà nó không đi qua gốc tọa độ O. Cho $\sum$ là mặt sinh ra bởi các tia Op với p là một điểm chuyển động trên C (Hình 3.0.4).

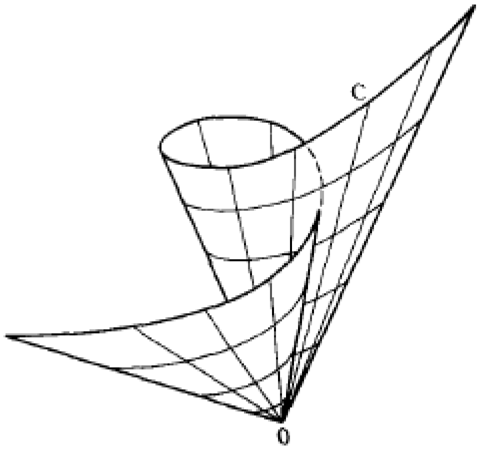
(a) Tìm tham số hóa của mặt X mà vết của nó là $\sum$.

(b) Xác định các điểm không chính qui trên $\sum$.

(c) Chúng ta nên loại khỏi $\sum$ những điểm nào để thu được một mặt chính qui?

Bài tập 3.26. Chứng minh rằng định nghĩa hàm khả vi $f : V \subset S \longrightarrow \mathbb{R}$, với S là mặt chính qui tương đương với định nghĩa: *hàm f khả vi tại p nó là thu hẹp của một ánh xạ khả vi lên tập V chứa p.*

Bài tập 3.27. Cho $A \subset S$ là một tập con của mặt chính qui S. Chứng minh rằng A là một mặt chính qui khi và chỉ khi A là một tập mở trên S. Nghĩa là



Hình 3.0.4:

$A = U \cap S$ với U là một tập mở trong $\mathbb{R}^3$.

Bài tập 3.28. Ta đồng nhất $\mathbb{R}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = -1\}$ với tập các số phức $\mathbb{C}$ bởi tương ứng $(x, y, -1) \mapsto x + iy$. Cho $P : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ là ánh xạ xác định bởi

$$P(\xi) = a_n\xi^n + a_{n-1}\xi^{n-1} + \cdots + a_0,\ a_0, a_i \in \mathbb{C},\ \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

Kí hiệu π_N là phép chiếu nổi của mặt cầu đơn vị $\mathbb{S}^2$ từ cực bắc $N = (0, 0, 1)$ lên mặt phẳng $\mathbb{R}^2$. Chứng minh rằng ánh xạ

$$\begin{aligned} &F(p) = \pi_N^{-1} \circ P \circ \pi_n(p), \quad \text{nếu} \quad p \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \\ &F(N) = N. \end{aligned}$$

là một hàm khả vi.

Bài tập 3.29. Chứng tỏ rằng phương trình của mặt phẳng tiếp xúc tại điểm $p = (x_0, y_0, z_0)$ của mặt chính qui cho bởi phương trình $f(x, y, z) = 0$ với 0 là giá trị chính qui của f có dạng

$$f_x(p)(x - x_0) + f_y(p)(y - y_0) + f_z(p)(z - z_0) = 0.$$

Bài tập 3.30. Viết phương trình các mặt phẳng tiếp xúc của mặt $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ tại các điểm $(x, y, 0)$ và chứng minh rằng chúng song song với trục Oz.

Bài tập 3.31. Cho mặt chính qui S là đồ thị của hàm $z = f(x, y)$.

(a) Chứng tỏ rằng phương trình của mặt phẳng tiếp xúc của mặt tại điểm $p = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ được cho bởi

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

(b) Xem lại định nghĩa đạo hàm Df của hàm $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ và chứng tỏ rằng mặt phẳng tiếp xúc là đồ thị của đạo hàm Df_q, với $q = (x_0, y_0)$.

Bài tập 3.32. Chứng minh rằng các mặt phẳng tiếp xúc của mặt được cho bởi $z = xf(y/x)$, $x \neq 0$, với f là một hàm khả vi, đều đi qua gốc tọa độ.

Bài tập 3.33. Giả sử một lân cận tọa độ của một mặt chính qui có tham số hóa dạng

$$X(u, v) = \alpha(u) + \beta(v).$$

với α và β là các đường tham số chính qui. Hãy chứng tỏ rằng các mặt phẳng tiếp xúc dọc một đường tọa độ trong lân cận này đều song song với một đường thẳng.

Bài tập 3.34. Cho $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ là một đường tham số chính qui với độ cong $k \neq 0$. Xét mặt tiếp xúc của α

$$X(u, v) = \alpha(u) + v\alpha'(u); \; u \in I, v = 0.$$

Chứng minh rằng các mặt phẳng tiếp xúc dọc theo đường cong $X(\text{const}, \text{v})$ trùng nhau.

Bài tập 3.35. Cho $f : S \longrightarrow R$ cho bởi $f(p) = |p - p_0|^2$, với $p \in S$ và p_0 là một điểm cố định của $\mathbb{R}^3$. Chứng tỏ rằng $Df_p(v) = 2v(p - p_0)$, với mọi $v \in T_pS$.

Bài tập 3.36. Chứng minh rằng nếu $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ là ánh xạ tuyến tính và $S \subset \mathbb{R}^3$ là một mặt chính qui bất biến đối với L, tức là $L(S) \subset S$. Khi đó $L|_S$ là ánh xạ khả vi và $DL_p(v) = L(v)$, với mọi $p \in S$, $v \in T_pS$.

Bài tập 3.37. Chứng minh rằng mặt tham số

$$X(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au), a \neq 0.$$

là một mặt chính qui. Tính pháp vector $N(u,v)$ và xác định mặt phẳng tiếp xúc của X dọc các đường thẳng $u = u_0$.

Bài tập 3.38. Cho $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ là đường tham số có độ cong khác 0 với tham số là độ dài cung. Xét

$$X(s,v) = \alpha(s) + r(\mathbf{n}(s)\cos v + \mathbf{b}(s)\sin v),\ r = \text{const},\ \text{s} \in \text{I}$$

là mặt tham số hóa (ống bán kính r dọc đường α), với $\mathbf{n}$ là pháp tuyến chính và $\mathbf{b}$ là trùng pháp tuyến của α. Chứng tỏ rằng khi X chính qui, pháp vector sẽ là

$$N(s,v) = -\big(\mathbf{n}(s)\cos v + \mathbf{b}(s)\sin v\big)$$

Bài tập 3.39. Chứng tỏ rằng pháp tuyến của mặt xác định bởi tham số hóa

$$X(u,v) = \big(f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u)\big);\ f(u) = 0,\ g(u) = 0,$$

luôn đi qua trục Oz.

Bài tập 3.40. Chứng tỏ rằng mỗi một phương trình sau

$$x^2 + y^2 + z^2 = ax,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = by,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = cz;$$

xác định một mặt chính qui và chúng trực giao với nhau.

Bài tập 3.41. Một điểm tới hạn của hàm khả vi $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ xác định trên một mặt chính qui S là một điểm $p \in S$ sao cho $Df_p = 0$.

(a) Cho$f : S \longrightarrow R$ xác định bởi $f(p) = |p - p_0|$, $p \in S, p_0 \in S$. Chứng tỏ rằng p là điểm tới hạn của f nếu và chỉ nếu đường thẳng nối p với p_0 trực giao với S tại p.

(b) Cho $h : S \longrightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $h(p) = p.v$ với $v \in \mathbb{R}^3$ là vector đơn vị. Chứng tỏ rằng $p \in S$ là điểm tới hạn của f khi và chỉ khi v là vector pháp của S tại p.

Bài tập 3.42. Cho Q là hợp của ba mặt phẳng tọa độ $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Lấy $p = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus Q$.

(a) Chứng minh rằng phương trình theo t

$$\frac{x^2}{a-t}+\frac{y^2}{b-t}+\frac{z^2}{c-t}=f(t)=1,\ a>b>c>0$$

có 3 nghiệm thực phân biệt t_1, t_2, t_3.

(b) Chứng minh rằng với mỗi $p \in \mathbb{R}^3 \setminus Q$, các tập $f(t_1)-1=0$, $f(t_2)-1=0$, $f(t_3)-1=0$ là các mặt chính qui, đôi một trực giao với nhau.

Bài tập 3.43. Chứng minh rằng nếu các vector pháp tuyến của mặt chính qui liên thông S đều đi qua một điểm cố định thì nó nằm trên mặt cầu.

Bài tập 3.44. Hai mặt chính qui S_1 và S_2 được gọi là *giao ngang nhau* nếu với mọi $p \in S_1 \cap S_2$ thì $T_pS_1 \neq T_pS_2$. Chứng minh rằng nếu S_1 và S_2 có giao ngang nhau thì $S_1 \cap S_2$ là một đường cong chính qui.

Bài tập 3.45. Chứng minh rằng nếu mặt phẳng P chỉ cắt mặt chính qui S tại một điểm duy nhất thì nó là mặt phẳng mặt tiếp của S.

Bài tập 3.46. Cho w là vector tiếp xúc của S tại $p \in S$ và $X(u,v)$, $\overline{X}(\overline{u},\overline{u})$ là hai tham số hóa địa phương của S tại p. Giả sử ta có biểu diễn của w trong hai hệ tọa độ địa phương tương ứng là

$$w=\alpha_1 X_u+\alpha_2 X_v \quad w=\beta_1\overline{X}_u+\beta_2\overline{X}_v$$

Chứng minh rằng các tọa độ địa phương của w có quan hệ

$$\begin{aligned}\beta_1&=\alpha_1\frac{\partial\overline{u}}{\partial u}+\alpha_2\frac{\partial\overline{u}}{\partial v}\\ \beta_2&=\alpha_1\frac{\partial\overline{v}}{\partial u}+\alpha_2\frac{\partial\overline{v}}{\partial v}\end{aligned}$$

với $\overline{u}=\overline{u}(u,v)$ và $\overline{v}=\overline{v}(u,v)$ là các biểu thức của phép đổi tọa độ.

Bài tập 3.47. Cho $S \subset \mathbb{R}^3$ là một mặt chính qui và P là một mặt phẳng trong $\mathbb{R}^3$. Nếu tất cả các điểm của S nằm về một phía của P. Chứng minh rằng P là mặt phẳng tiếp xúc của S tại các điểm $S \cap P$.

Bài tập 3.48. Chứng minh rằng các phép trực giao từ tâm $O(0,0,0)$ của ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

lên các mặt phẳng tiếp xúc của nó tạo nên mặt chính qui

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ (x^2+x^y+z^2)^2=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2\}\setminus\{(0,0,0)\}.$$

Bài tập 3.49. Cho $f: S \longrightarrow \mathbb{R}$ là một hàm khả vi trên mặt chính qui liên thông S. Giả sử rằng $Df_p = 0$ với mọi $p \in S$, chứng minh rằng f là hàm hằng trên S.

Bài tập 3.50. Chứng minh rằng nếu tất cả các pháp tuyến của mặt chính qui liên thông S luôn cắt một đường thẳng cố định thì S là một mặt tròn xoay.

Bài tập 3.51. Chứng minh rằng nếu $\varphi: S_1 \longrightarrow S_2$ và $\psi: S_2 \longrightarrow S_3$ là các hàm khả vi và $p \in S$ thì ta có $D(\psi\circ\varphi)_p = D\psi_{\varphi(p)}\circ D\varphi_p$.

Bài tập 3.52. Chứng minh rằng nếu C_1 và C_2 là hai đường cong chính qui nằm trên mặt S, tiếp xúc nhau tại p và $\varphi: S \longrightarrow S$ là ánh xạ khả vi tại p thì $\varphi(C_1)$ và $\varphi(C_2)$ là hai đường cong chính qui tiếp xúc nhau tại $\varphi(p)$.

Bài tập 3.53. Cho S là đồ thị của hàm $z = f(x, y)$ và $p \in S$, chứng minh rằng có thể chọn hệ trục tọa độ sao cho mặt phẳng tiếp xúc của S tại p là mặt phẳng Oxy.

Bài tập 3.54.

(a) Định nghĩa giá trị chính qui của hàm khả vi $f: S \longrightarrow \mathbb{R}$ trên mặt chính qui S.

(b) Chứng minh rằng nghịch ảnh của giá trị chính qui của hàm khả vi trên mặt chính qui S là một đường cong chính qui S.

Bài tập 3.55. Xác định dạng cơ bản thứ nhất của các mặt tham số chính qui

(a) $X(u,v) = (a\sin u\cos v, b\sin u\sin v, c\cos u)$ ellipsoid.

(b) $X(u,v) = (au\cos v, au\sin v, u^2)$ elliptic paraboloid.

(c) $X(u,v) = (au\cosh v, bu\sinh v, u^2)$ hyperbolic paraboloid.

(d) $X(u,v) = (a\sinh u\cos v, a\sinh u\sin v, c\cosh u)$ hyperboloid hai tầng.

Bài tập 3.56. Tìm dạng cơ bản thứ nhất của mặt cầu đơn vị $\mathbb{S}^2$ theo tham số hóa của phép chiếu cầu từ $\mathbb{S}^2$ lên mặt phẳng $\mathbb{R}^2$.

Bài tập 3.57. Cho tham số hóa của một mặt chính qui (S)

$$X(u,v) = (u\cos v, u\sin v, \ln\cos v + u),\ -\pi/2 < v < \pi/2.$$

Chứng tỏ rằng hai đường cong $X(u_1, v), X(u_2, v)$ xác định những đoạn thẳng có độ dài bằng nhau trên tất cả các đường tham số $X(u, \text{const})$.

Bài tập 3.58. Chứng tỏ rằng diện tích A của miền bị chặn R của mặt $z = f(x, y)$ là

$$A = \iint_\Omega \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dxdy.$$

ở đây Ω là hình chiếu trực giao của R lên mặt phẳng Oxy.

Bài tập 3.59. Chứng minh rằng có thể tìm được tham số hóa của mặt tròn xoay sao cho

$$E = E(v), \quad F = 0, \quad G = 1.$$

Bài tập 3.60. Cho $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ z = 0\}$ là mặt phẳng Oxy, chọn tham số $X : U \longrightarrow P$ được cho bởi

$$X(\rho, \theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, 0)$$

ở đó

$$U = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 :\ \rho > 0,\ 0 < \theta < 2\pi\}.$$

Xác định dạng cơ bản thứ nhất của P theo tham số hóa trên.

Bài tập 3.61. Trong $\mathbb{R}^3$ với mục tiêu trực chuẩn, cho parabol $(P) : z = 3x^2$

(a) Viết phương trình mặt tròn xoay (S) sinh bởi (P) khi quay quanh trục Oz.

(b) Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc của S tại điểm tùy ý

(c) Tìm các hệ số của dạng cơ bản thứ nhất và thứ hai của (S).

(d) Xác định độ cong Gauss và độ cong trung bình của (S).

(e) Tìm độ cong chính và phương chính của (S).

Bài tập 3.62. Xác định các điểm hyperbolic, eliptic, parabolic, umbulic (rốn) của mặt xuyến.

Bài tập 3.63. Cho (S) là mặt chính qui có tham số hóa dạng

$$X(u,v) = (u\sin v, u\cos v, u+v)$$

(a) Xác định độ cong trung bình và độ cong Gauss của (S).

(b) Tìm độ cong chính và phương chính của (S) tại điểm $X(0,0)$.

Bài tập 3.64. Giả sử C là một đường sinh của mặt tròn xoay S. s là tham số hóa độ dài cung của C và kí hiệu $\rho = \rho(s)$ là khoảng cách từ trục quay đến điểm trên C tương ứng với s.

(a) (Định lý Pappus) Chứng minh rằng diện tích của S bằng $2\pi \int_0^l \rho(s)ds$ với l là độ dài của đường cong C.

(b) Áp dụng kết quả trên để tính diện tích của mặt xuyến tròn xoay.

Bài tập 3.65. Chứng minh rằng diện tích của mặt ống chính qui bán kính r quanh đường cong α bằng $2\pi r$ lần chiều của α.

Bài tập 3.66. Chứng minh rằng

$$X(u,v) = (u\sin\alpha\cos v, u\sin\alpha\sin v, u\cos\alpha),\ 0 < u < \infty,\ 0 < V < 2\pi,\ \alpha = \text{const}$$

là tham số hóa của mặt nón với gốc ở đỉnh bằng 2α, trong hệ tọa độ địa phương tương ứng, chứng minh rằng đường cong

$$X(c\mathrm{e}^{\sin\alpha\cot\beta}, \mathrm{v}),\ \mathrm{c} = \text{const},\ \beta = \text{const},$$

tạo với các đường sinh của mặt nón ($v = \text{const}$) các góc bằng nhau.

Bài tập 3.67. (Helicoid tổng quát) Cho C là một đường cong chính qui, nó không cắt trục e trong mặt phẳng P. Với mỗi điểm M thuộc C tạo nên một đường tròn hoặc đường xoắn ốc. Tập S sinh ra bởi đường cong C được gọi là helicoid tổng quát với trục e và đường sinh C. Chọn hệ trục tọa độ sao cho trục e là trục Oz và C nằm trong mặt phẳng Oyz.

(a) Nếu $\big(f(s), g(s)\big)$ là một tham số hóa độ dài cung của C, $a < s < b$, $f(s) > 0$ khi đó $X : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ với

$$U = \{(s,u) \in \mathbb{R}^2 : \; a < s < b, \, 0 < u < 2\pi\}$$

$$X(s,u) = \big(f(s)\cos u, f(s)\sin u, g(s) + cu\big), \; c = \text{const}$$

là một tham số hóa của S. Từ đó suy ra S là một mặt chính qui.

(b) Các đường tọa độ của tham số hóa trên trực giao với nhau khi và chỉ khi $X(U)$ hoặc là một mặt tròn xoay hoặc là helicoid chính tắc.

Bài tập 3.68. Cho S_1, S_2 là hai mặt chính qui định hướng và $S_1 \cap S_2$ là liên thông. Chứng minh rằng nếu $S = S_1 \cup S_2$ cũng là một mặt chính qui thì S cũng định hướng được.

Bài tập 3.69. Cho S là một mặt chính qui được phủ bởi hai hệ tọa độ địa phương V_1, V_2. Giả sử $V_1 \cap V_2$ có hai thành phần liên thông W_1, W_2 và định thức Jacobi của phép đổi tọa độ là dương trên W_1 và âm trên W_2. Chứng minh rằng S không định hướng được.

Bài tập 3.70. Cho S_2 là một mặt chính qui định hướng được và $\varphi : S_1 \longrightarrow S_2$ là một ánh xạ khả vi, đồng phôi địa phương tại mọi $p \in S_1$. Chứng minh rằng S_1 là một mặt định hướng được.

Bài tập 3.71. Cho $f : S_1 \longrightarrow S_2$ là một vi phôi. Chứng minh rằng S_1 định hướng được khi và chỉ khi S_2 cũng định hướng được.

Bài tập 3.72. Chứng minh rằng nếu mặt chính qui S chứa một tập mở vi phôi với dãy Möbius thì nó không định hướng được.

Bài tập 3.73. Chứng minh rằng nếu một mặt chính qui tiếp xúc với một mặt phẳng α dọc theo một đường cong thì các điểm của đường cong đó hoặc là điểm paraboliod hoặc là điểm phẳng.

Bài tập 3.74. Chứng tỏ rằng tại một điểm hyperboliod các phương chính là phân giác của các đường tiệm cận.

Bài tập 3.75. Cho C là một đường cong chính qui nằm trên mặt S với độ cong Gauss $K > 0$. Chứng minh rằng độ cong k của C tại điểm p thỏa mãn

$$k \geq \min\{|k_1|, |k_2|\}$$

với k_1 và k_2 là các độ cong chính của S tại p.

Bài tập 3.76. Giả sử mặt chính qui S có tính chất $|k_1| \leq 1$ và $|k_2| \leq 1$ tại mọi điểm $p \in S$. Khi đó, có thể kết luận độ cong k của đường cong trên mặt S thỏa mãn $|k| \leq 1$ không?

Bài tập 3.77. Chứng minh rằng độ cong trung bình H tại điểm $p \in S$ được cho bởi đẳng thức

$$H = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} k_n(\theta)d\theta,$$

với $k_n(\theta)$ là độ cong pháp dạng tại p theo phương $\overrightarrow{v}$ mà nó tạo thành với một phương cố định một góc θ.

Bài tập 3.78. Chứng minh rằng tổng các độ cong pháp dạng theo hai phương trực giao với nhau, tại điểm p, luôn bằng một hằng số.

Bài tập 3.79. Chứng minh rằng tại các điểm có độ cong chính $K = 0$ và không phải là điểm phẳng luôn có hai phương trực giao với nhau.

Bài tập 3.80. Mô tả miền của mặt cầu đơn vị được phủ bởi ảnh của ánh xạ Gauss của các mặt sau đây:

(a) Paraboloid tròn xoay $z = x^2 + y^2$.

(b) Hyperboloid 1-tầng tròn xoay $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

(c) Catenoid $x^2 + y^2 = \cosh z$.

Bài tập 3.81. Chứng minh rằng

(a) Ảnh của $N \circ \alpha$ bởi ánh xạ Gauss $N : S \longrightarrow \mathbb{S}^2$ của đường cong tham số chính qui $\alpha : I \longrightarrow S$ mà nó không chứa điểm phẳng hoặc điểm parabolic là một đường cong chính qui trên mặt cầu $\mathbb{S}^2$ (gọi là ảnh cầu của α).

(b) Nếu $C = \alpha(I)$ là đường độ cong và k là độ cong của nó tại p, khi đó ta có

$$k = |k_n k_N|$$

với k_n là độ cong pháp tại p dọc theo đường tiếp tuyến của C và k_N là độ cong của ảnh cầu $N(C) \subset \mathbb{S}^2$ tại $N(p)$.

Bài tập 3.82. Giả sử mặt phẳng mật tiếp của đường cong $C \subset S$, không có vector tiếp xúc nào là vector chỉ phương tiệm cận, tạo với mặt phẳng tiếp xúc dọc theo C một góc hằng. Chứng minh rằng C là đường cong phẳng.

Bài tập 3.83. Cho p là một điểm hyperbolic trên mặt S, r là phương nằm trong mặt phẳng tiếp xúc T_pS. Mô tả và minh họa cách dựng tia r' liên hợp với phương r trong chỉ đồ Dupin.

Bài tập 3.84. Chứng minh rằng nếu S_1 giao S_2 theo đường cong chính qui C, khi đó độ cong k của C tại p được cho bởi biểu thức

$$k^2 \sin^2 \theta = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 \cos\theta,$$

vơi λ_1, λ_2 tương ứng là hai độ cong pháp dạng tại p, dọc theo đường cong C, của hai mặt S_1, S_2 và θ là góc tại bởi hai pháp vector của S_1 và S_2 tại p.

Bài tập 3.85. Chứng minh rằng đường kinh tuyến trung tâm của mặt xuyến là đường chính của nó.

Bài tập 3.86. Chứng minh rằng nếu $H \equiv 0$ trên S và nó không có điểm phẳng thì ánh xạ Gauss N của nó có tính chất

$$\langle DN_p(w_1), DN_p(w_2)\rangle = -K(p)\langle w_1, w_2\rangle$$

với mọi điểm $p \in S$ và với mọi $w_1, w_2 \in T_pS$

Bài tập 3.87. Chứng tỏ rằng tại điểm gốc $O(0,0,0)$ của mặt yên ngựa (hyperbolic paraboloid) $z = axy$ độ cong Gauss $K = -a^2$, còn độ cong trung bình $H = 0$.

Bài tập 3.88. Xác định các đường tiệm cận và các đường chính khúc của mặt $z = xy$.

Bài tập 3.89. Xác định các đường tiệm cận và các đường chính khúc của mặt helicoid có tham số hóa

$$X(u,v) = (v\cos u, v\sin u, cu)$$

và chỉ ra rằng độ cong trung bình của nó bằng 0.

Bài tập 3.90. Xác định các đường tiệm cận của Catenoid

$$X(u,v) = (\cosh v \sin u, \cosh v \cos u, v).$$

Bài tập 3.91. Cho tham số hóa của mặt Enneper

$$X(u,v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + u^2v, u^2 - v^2\right)$$

(a) Hãy tính các hệ số của dạng cơ bản thứ nhất và thứ hai.

(b) Tính các độ cong chính. Từ đây suy ra mặt Enneper là mặt cực tiểu.

(c) Các đường chính khúc là các đường tọa độ.

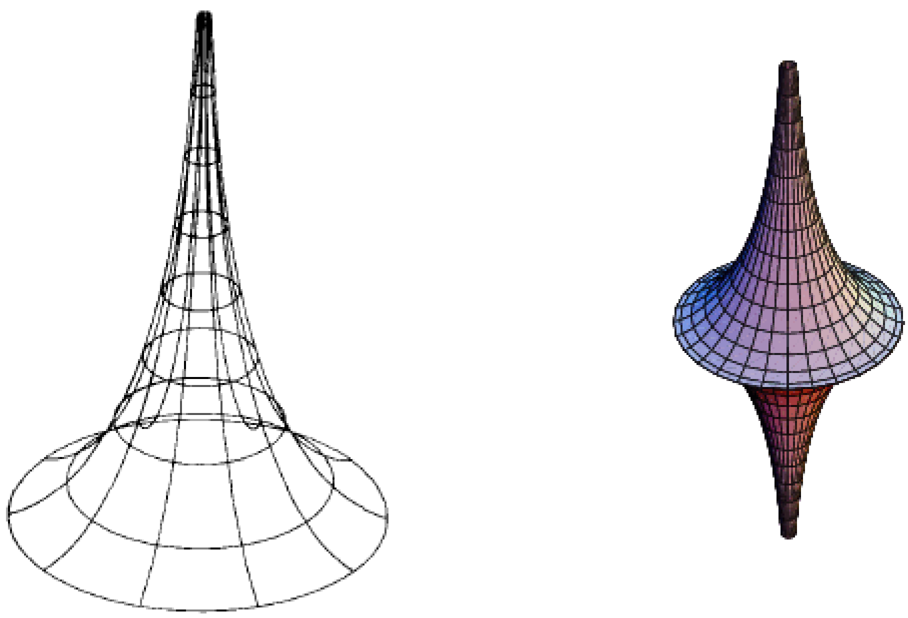
(d) Các đường đường tiệm cận là các đường $u + v = \text{const}$ và $u - v = \text{const}$

Bài tập 3.92. (*Mặt giả cầu (pseudosphere), $K \equiv -1$*)

(a) Xác định phương trình của đường cong C thỏa điều kiện: khoảng cách giữa tiếp tuyến bất kì của của nó đến một đường thẳng cố định r không cắt C luôn bằng 1.

(b) Quay đường tractrix quanh trục Oz ta nhận được một mặt tròn xoay gọi là mặt giả cầu (Hình 3.0.5). Hãy xác định một tham số hóa của mặt giá cầu trong lân cận của một điểm chính qui .

(c) Chứng minh rằng độ cong Gauss của mặt giả cầu tại một điểm chính qui bất kỳ bằng -1.



Hình 3.0.5:

Bài tập 3.93. Cho S là mặt tròn xoay xác định bởi tham số hóa

$$X(u,v) = (f(v)\sin u, f(v)\cos u, g(v))$$

có độ cong Gauss K là hằng số và $(f')^2 + (g')^2 = 1$. Chứng minh rằng

(a) f thỏa điều kiện $f'' + Kf = 0$ và g được cho bởi $g = \int \sqrt{1-(f')^2}dv$ trên miền của v sao cho tích phân được xác định.

(b) Các mặt tròn xoay có độ cong Gauss hằng $K = 1$ mà nó trực giao với mặt phẳng xOy được xác định bởi

$$f(v) = C\cos v, g(v) = \int_0^v \sqrt{1 - C^2\sin^2 v}dv,$$

với C là hằng số

(c) Xác định các mặt tròn xoay có độ cong Gauss bằng -1

(d) Chỉ có các mặt trụ đứng chính qui, nón tròn và mặt phẳng có hàm độ cong Gauss bằng 0.

Bài tập 3.94. Xác định các đường độ cong (đường chính) của mặt giả cầu.

Bài tập 3.95. Chỉ ra một mặt compact, có điểm elliptic.

Bài tập 3.96. Định nghĩa độ cong Gauss của mặt không định hướng được? Có thể định nghĩa độ cong trung bình của mặt không định hướng được hay không?

Bài tập 3.97. Xác định các điểm rốn của ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Bài tập 3.98. Cho S là một mặt chính qui với định hướng N, lấy $V \subset S$ là một tập con của S, $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ là một hàm khả vi, khác không tại mọi điểm trên V, chọn v_1, v_2 là hai trường vector tiếp xúc, khả vi, trực giao và $v_1 \wedge v_2 = N$ tại mọi điểm trên V.

(a) Chứng minh rằng độ cong Gauss của S trên V được cho bởi biểu thức

$$K = \frac{\langle D(fN)(v_1) \wedge D(fN)(v_2), fN\rangle}{f^3}$$

Ý nghĩa của biểu thức trên là nếu chúng ta có thể chọn hàm f một cách khéo léo thì có thể tính được độ cong Gauss một cách đơn giản. Câu b) là một ví dụ minh họa

(b) Áp dụng kết quả trên để chỉ ra rằng nếu thu hẹp hàm f

$$f = \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}$$

lên ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

thì ta có độ cong Gauss của ellipsoid bằng $K = \dfrac{1}{a^2b^2c^2}\dfrac{1}{f^4}$.

Bài tập 3.99. Chứng minh rằng Helicoid là một mặt kẻ, đường thắt của nó là trục Oz và các đường tham số hóa phân bố của nó là hằng.

Bài tập 3.100. Chứng minh rằng trên hyperboloid $x^2+y^2-z^2 = 1$, các đường vĩ tuyến có bán kính nhỏ nhất là đường thắt, tạo với các đường kẻ, các đường tham số phân bố một góc hằng

Bài tập 3.101. Cho α là một đường cong chính qui trên mặt S, xét mặt kẻ sinh ra bởi họ một tham số $\{\alpha(t), N(t)\}$, với $N(t)$ là pháp vector của mặt S tại $\alpha(t)$. Chứng minh rằng $\alpha(I) \subset S$ là một đường cong chính khi và chỉ khi mặt kẻ thu được là một mặt khả triển.

Bài tập 3.102. Một mặt conoid là mặt kẻ mà các đường kẻ L_t trực giao với một đường r nào đó mà nó không cắt đường mức $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

(a) Hãy xác định một tham số hóa cho mặt conoid đứng và xác định điều kiện để mặt kẻ thu được không trụ.

(b) Cho ví dụ về một mặt kẻ conoid đứng, chỉ ra đường thắt và tham số hóa phân bố của nó.

Bài tập 3.103. Cho $X(t, v) = \alpha(t) + v\beta(t)$ là một mặt kẻ khả triển. Chứng minh rằng tại các điểm chính qui chúng ta có

$$\langle N_v, X_v\rangle = \langle N_v, X_t\rangle = 0$$

Từ đó rút ra kết luận: mặt phẳng tiếp xúc của mặt kẻ khả triển là hằng dọc theo một đường kẻ cố định.

Bài tập 3.104. Chứng minh rằng tồn tại mặt cực tiểu không compact.

Bài tập 3.105. Cho S là một mặt chính qui không có điểm rốn, chứng minh rằng S là mặt cực tiểu khi và chỉ khi ánh xạ Gauss của nó thỏa điều kiện, với mọi điểm$p \in S$ và mọi vector $w_1, w_2 \in T_pS$, ta có

$$\langle DN_p(w_1), DN_p(w_2)\rangle = \lambda(p)\langle w_1, w_2\rangle$$

với $\lambda(p)$ là số khác 0 và phụ thuộc vào p.

Bài tập 3.106. Cho X, Y là hai tham số hóa của hai mặt cực tiểu S và S', nếu các hàm thành phần của chúng đôi một liên hiệp điều hòa với nhau thì ta nói X, Y là các mặt cực tiểu liên hợp với nhau. Chứng minh rằng

(a) Helicoid và Catenoid là hai mặt cực tiểu liên hợp với nhau.

(b) Nếu X, Y là hai mặt cực tiểu liên hợp với nhau thì mặt có tham số hóa

$$Z = \cos tX + \sin tY$$

cũng là một mặt cực tiểu.

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP

BÀI TẬP CHƯƠNG 1

Bài tập 1.1. Ta có

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to 0}\frac{|f(a+\Delta x,b+\Delta y)-f(a,b)-\Delta(\Delta x,\Delta y)|}{\|(\Delta x,\Delta y)\|}$$
$$=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to 0}\frac{|\sin(a+\Delta x)-\sin a-\cos a.\Delta x|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$$
$$=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to 0}\frac{|2\cos\frac{2a+\Delta x}{2}\sin\frac{\Delta x}{2}-\cos a.\Delta x|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\cos\frac{2a+\Delta x}{2}\Delta x-\cos a.\Delta x|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}.$$

Ta lại có

$$0\le\frac{|\cos\frac{2a+\Delta x}{2}\Delta x-\cos a.\Delta x|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\le\frac{|\cos\frac{2a+\Delta x}{2}\Delta x-\cos a.\Delta x|}{|\Delta x|}$$

Ta có đánh giá

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\cos\frac{2a+\Delta x}{2}\Delta x-\cos a.\Delta x|}{|\Delta x|}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\frac{2a+\Delta x}{2}-\cos a=0$$
$$\Rightarrow\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\cos\frac{2a+\Delta x}{2}\Delta x-\cos a.\Delta x|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=0$$
$$\Rightarrow Df(a,b)=0.$$

Bài tập 1.2. Để chứng minh f khả vi tại $x=0$ ta cần chỉ ra tồn tại một ánh xạ tuyến tính đi từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}$ thỏa giả thiết.

Thật vậy, xét ánh xạ tuyến tính $\mathcal{O}\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. Do hàm f thỏa:

$$|f(0)|\le\|0\|^2=0\ \Rightarrow\ f(0)=0.$$

nên ta có

$$\frac{|f(0+h)-f(0)-\mathcal{O}(h)|}{\|h\|}=\frac{|f(x)|}{\|h\|}\le\frac{\|h\|^2}{\|h\|}=\|h\|$$

nên

$$\lim_{h\to 0}\frac{|f(0+h)-f(0)-\mathcal{O}(h)|}{\|h\|}=\lim_{h\to 0}\|h\|=0.$$

Vậy f khả vi tại $x = 0$ và $Df(0) = 0$.

Bài tập 1.3.

(a) $D_1f(x,y) = \lim\limits_{\triangle x \to 0} \dfrac{f(x+\triangle x, y) - f(x,y)}{\triangle x}$

$D_1f(0,0) = \lim\limits_{\triangle x \to 0} \dfrac{f(0+\triangle x, 0) - f(0,0)}{\triangle x} = \lim\limits_{\triangle x \to 0} \dfrac{\triangle x.0 - 0}{\triangle x} = 0.$

Tương tự:

$+ \ D_2f(x,y) = \lim\limits_{\triangle y \to 0} \dfrac{f(x, y+\triangle y) - f(x,y)}{\triangle y}$

$\Rightarrow D_2f(0,0) = \lim\limits_{\triangle y \to 0} \dfrac{f(0, 0+\triangle y) - f(0,0)}{\triangle y} = 0.$

(b) Giả sử f khả vi tại $(0,0) \Rightarrow Df(0,0) = (0,0)$.

Ta có:

$$\lim_{(\triangle x, \triangle y) \to (0,0)} \frac{|f(0+\triangle x, 0+\triangle y) - f(0,0) - (Df(0,0)(\triangle x, \triangle y))|}{\sqrt{(\triangle x)^2 + (\triangle y)^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{(\triangle x, \triangle y) \to (0,0)} \frac{|f(\triangle x, \triangle y)|}{\sqrt{(\triangle x)^2 + (\triangle y)^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{(\triangle x, \triangle y) \to (0,0)} \frac{\triangle x|\triangle y|}{\sqrt{(\triangle x)^2 + (\triangle y)^2}} = 0. \quad (1)$$

Chọn $\triangle x = \triangle y > 0$.

Suy ra:

$$\lim_{(\triangle x, \triangle y) \to (0,0)} \frac{\triangle x|\triangle y|}{\sqrt{(\triangle x)^2 + (\triangle y)^2}} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{(\triangle x)^2}{2(\triangle x)^2} = \frac{1}{2} \neq 0 \ (>< (1)).$$

Vậy f không khả vi tại $(0,0)$.

Bài tập 1.4.

(a) $f'(x,y,z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y.x^{y-1} & (lnx).x^y & 0 \end{pmatrix}$

(b) Đặt $f_1 = x^y, f_2 = 0$.

$$\Longrightarrow f'(x,y,z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} & \dfrac{\partial f_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} & \dfrac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y.x^{y-1} & (lnx).x^y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{aligned} f'(x,y,z) &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin y.\cos(x.\sin y) & x.\cos y & \cos(x.\sin y) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(d) Đặt $f_1 = \sin(xy),\ f_2 = \sin(x\sin y),\ f_3 = x^y$.

$$\Longrightarrow f^{'}(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial x} & \dfrac{\partial f_3}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y.\cos(x.y) & x.\cos(x.y) \\ \sin y.\cos(x.\sin y) & x.\cos y\cos(x.\sin y) \\ y.x^{y-1} & (lnx).x^y \end{pmatrix}$$

Bài tập 1.5. Ta có

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \Big(\frac{x}{2} + x^2\sin(1/x)\Big) = 0$$

Với $x \neq 0$ ta có

$$f'(x) = \frac{1}{2} + 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

nên f' không liên tục tại $x = 0$.

Bây giờ ta chứng minh trong mỗi lân cận của 0, hàm f không thể có ánh xạ ngược. Thật vậy chọn 2 dãy:

$$x_k = \frac{1}{2k\pi} \quad \text{và} \quad y_k = \frac{1}{(4k+1)\dfrac{\pi}{2}} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Ta có

$$f'(x_k) = -\frac{1}{2} < 0, \quad f'(y_k) = \frac{1}{2} + \frac{4}{(4k+1)\pi} > 0.$$

Suy ra f không đơn điệu trong một lân cận nào của 0, nên không thể tồn tại hàm ngược f^{-1}.

Nói cách khác, điều kiện liên tục không thể bỏ được trong định lý hàm ngược.

Bài tập 1.6.

(a) Ta có công thức xác định hàm h là:

$$h(t) = \begin{cases} t.\|x\|.g\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right) & \text{nếu} \quad t > 0 \\ -t.\|x\|.g\left(\dfrac{-x}{\|x\|}\right) & \text{nếu} \quad t < 0 \\ 0 & \text{nếu} \quad t = 0 \end{cases}$$

hay

$$h(t) = \begin{cases} t.\|x\|.g\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right) & \text{nếu} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu} \quad x = 0 \end{cases}$$

Xét các trường hợp sau

+ $x \neq 0$: Do $\|x\|.g\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)$ là hằng số nên suy ra:

$$h^{'}(t) = \|x\|.g\left(\frac{x}{\|x\|}\right), \; t \neq 0.$$

Khi $t = 0$ ta có:

$$\lim_{t\to 0}\frac{|h(t)-h(0)|}{|t|} = \|x\|.g\left(\frac{x}{\|x\|}\right).$$

Hay h khả vi trên $\mathbb{R}$.

+ $x = 0$: Khi đó $\|x\| = 0$ nên $h = 0$ trên $\mathbb{R}$. Suy ra h khả vi trên $\mathbb{R}$.

Như vậy trong mọi trường hợp ta có hàm h khả vi trên $\mathbb{R}$.

(b) Ta có:

$$\begin{aligned} D_1f(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{|f(h,0)-f(0,0)|}{|h|} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\|h\|.g\left(\dfrac{h,0}{\|h\|}\right)}{h} = \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h.g\left(\dfrac{h,0}{\|h\|}\right)}{h} & \text{với} \quad h > 0 \\ \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-h.g\left(\dfrac{h,0}{\|h\|}\right)}{h} & \text{với} \quad h < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra $D_1f(0,0) = 0$.

Tương tự ta cũng tính được:

$$D_1f(0,0) = 0 = \lim_{k\to 0}\frac{|f(0,k)-f(0,0)|}{|k|} = 0$$

Bây giờ giả sử f khả vi tại điểm $(0,0)$, ta có:

$$Df(0,0) = (0,0).$$

mà

$$\begin{aligned} \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{|f(h,k)-f(0,0)-\theta(h,k)|}{\|(h,k)\|} &= \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{|f(h,k)|}{\sqrt{h^2+k^2}} \\ &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} g\left(\frac{h,k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right) = 0 \end{aligned}$$

Nếu tồn tại $(x_0, y_0) \in \mathbb{S}^1$ sao cho $g(x_0, y_0) \neq 0$ thì ta có thể giả sử $x_0 > 0$. Khi đó với $h > 0, k = h\dfrac{y_0}{x_0}$ ta có:

$$g\left(\frac{\left(h, h.\dfrac{y_0}{x_0}\right)}{\sqrt{h^2 + h^2.\dfrac{y_0^2}{x_0^2}}}\right) = g\left(\frac{(x_0, y_0)}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}.x_0\right) = g\left(\frac{\left(1, \dfrac{y_0}{x_0}\right)}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}.x_0\right) = g(x_0, y_0) \neq 0!!$$

Vậy f không thể khả vi tại điểm $(0, 0)$.

Bài tập 1.7. Nếu với mọi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ta có $f^{'}(x, y) = 0$ thì f là hàm hằng nên f không thể đơn ánh.

Bây giờ giả sử tồn tại $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ sao cho: $f^{'}(x_0, y_0) \neq 0$. Ta có thể giả sử

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Khi đó tồn tại một tập mở A chứa (x_0, y_0) sao cho

$$D_1 f(x, y) \neq 0,\ \forall (x, y) \in A.$$

Xét hàm số $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ g(x, y) = (f(x, y), y),\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Ta có:

$$g^{'}(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nên

$$\det g^{'}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \neq 0,\ \forall (x, y) \in A.$$

Suy ra tồn tại hàm ngược $g^{-1} : g(A) \to A, g^{-1}(f(x, y), y) = (x, y)$.

Ta có:

$$g(x, y) = g(x^{'}, y^{'}) \Rightarrow \begin{cases} y = y^{'} \\ f(x, y) = f(x^{'}, y) \end{cases}$$

nên nếu f đơn ánh trên $\mathbb{R}^2$ thì g đơn ánh khả vi trên $\mathbb{R}^2$. Suy ra tồn tại g^{-1} đơn ánh khả vi trên $\mathbb{R}^2$ (mâu thuẫn với giả thiết của hàm g).

Vậy f không thể đơn ánh.

Bài tập 1.8. Với mỗi $v_x = (v, x) \in \mathbb{R}^n_x,\ \forall x \in \mathbb{R}^n$, ta có

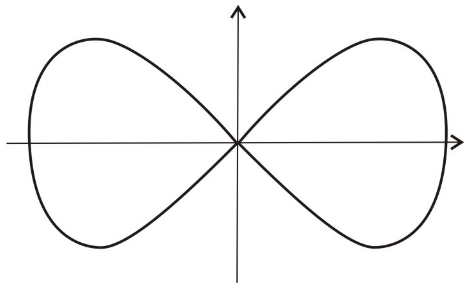
$$\begin{aligned}(g \circ f)_{*x}(v_x) &= [D(g \circ f)(x)(v)]_{(g\circ f)(x)} \\ &= [D_g(f(x))Df(x)(v)]_{(g\circ f)(x)} \\ &= g_{*f(x)}[Df(x)(v)]_{f(x)} \\ &= g_*[f_*(v_x)] = (g_* \circ f_*)(v_x)\end{aligned}$$

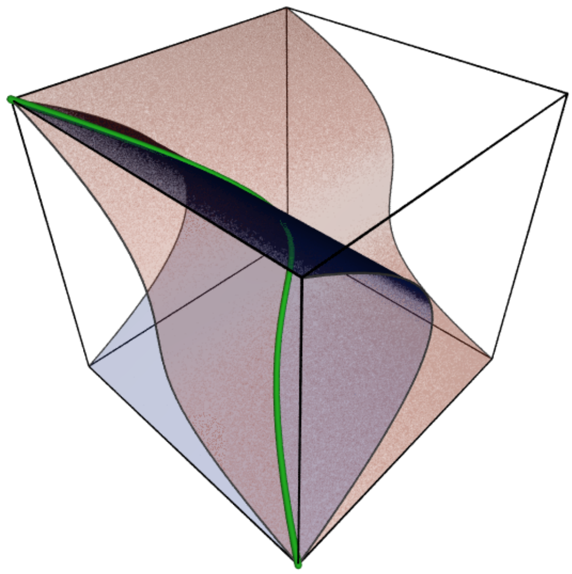
Suy ra $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

Bài tập 1.9. Ta có $|L(x) - L(y)| = |L(x - y)| \leq \|L\||x - y|$, từ đó suy ra ánh xạ L liên tục. Chứng minh $DL = L$.

BÀI TẬP CHƯƠNG 2

Bài tập 2.1. Hình 2.0.1





Hình 2.0.1:

Bài tập 2.2. $\alpha(t) = \big(-\sin t, \cos t\big)$

Bài tập 2.3. Đặt $f(t) = \alpha^2(t)$. Theo giả thiết thì $\alpha^{'}(t_0) = \min f(t)$

$$\Longrightarrow f^{'}(t_0) = 0$$
$$\Longrightarrow 2.\alpha(t_0).\alpha^{'}(t_0) = 0 \qquad (1)$$

Do α không đi qua gốc tọa độ nên $\alpha(t) \neq 0, \forall t$. Do đó từ (1) ta có $\alpha(t_0)$ trực giao với $\alpha^{'}(t_0)$.

Bài tập 2.4. • Nếu $\alpha'(t) = 0 \Rightarrow \alpha(t) = c$, $\forall t$. Vậy vết của $\alpha(t)$ là một điểm.

• Nếu $\alpha'(t) = c \neq 0 \Rightarrow \alpha(t) = ct + a$, $\forall t$. Vậy vết của $\alpha(t)$ là một đường thẳng hoặc một phần của đường thẳng.

Bài tập 2.5. Theo giả thiết ta có: $\alpha^{'}(t).v = 0$

$$\Leftrightarrow \int_0^t \alpha^{'}(t).v.dt = \int_0^t 0.dt$$
$$\Leftrightarrow v.\int_0^t \alpha^{'}(t).dt = 0$$
$$\Leftrightarrow v.\left(\alpha(t) - \alpha(0)\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow v.\alpha(t) - v.\alpha(0) = 0 \quad (1)$$

Do $\alpha(0)$ trực giao với $\overrightarrow{v}$ nên $v.\alpha(0) = 0$

$$(1) \Longrightarrow v.\alpha(t) = 0$$

Vậy $\alpha(t)$ trực giao với $\overrightarrow{v}, \forall t \in I$.

Bài tập 2.6. Với $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\alpha^{'}(t) \neq 0, \forall t \in I$, ta có

$$\begin{aligned} |\alpha(t)| = a &\Longleftrightarrow \alpha^2(t) = a^2 \\ \Longrightarrow & 2.\alpha(t).\alpha^{'}(t) = 0 \\ \Longrightarrow & \alpha(t) \perp \alpha^{'}(t), \forall t \in I. \end{aligned}$$

Bài tập 2.7.

(a) Ta có

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= a^2t^2\cos^2 t + a^2t^2\sin^2 t \\ &= a^2t^2(\cos^2 t + \sin^2 t) \\ &= a^2t^2 = 2z. \end{aligned}$$

Vậy vết của đường tham số nằm trên một mặt nón.

(b)

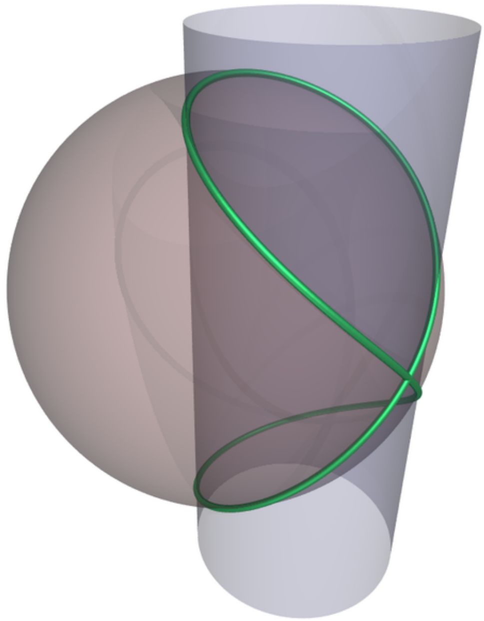
$$\begin{aligned} C(t) &= (\sin 2t, 1 - \cos 2t, 2\cos t) \\ &= (2\sin t\cos t, 2\sin^2 t, 2\cos t) \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (2\sin t\cos t)^2 + (2\sin^2 t)^2 \\ &= 4\sin^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t) \\ &= 4\sin^2 t \\ &= 4(1 - \cos^2 t) \\ &= 4 - 4\cos^2 t \\ &= 4 - z^2 \end{aligned}$$

Suy ra $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Vậy vết của đường tham số $C(t)$ nằm một mặt cầu có tâm $O(0,0,0)$ và bán kính $R = 2$. Chúng ta cũng chứng minh được vết của $C(t)$ nằm trên mặt trụ



Hình 2.0.2:

(Hình 2.0.2).

Bài tập 2.8. Tiếp tuyến đường tham số $\alpha(t) = (3t, 3t^2, 2t^3)$ nhận $\mathbf{t} = \alpha'(t) = (3, 6t, 6t^2)$ làm vector chỉ phương

Đường thẳng $(d) : \begin{cases} y = 0 \\ z = x \end{cases}$ có VTCP $\vec{u} = (1, 0, 1)$.

$\Rightarrow$ góc $((\Delta), d) =$ góc$(\mathbf{t}, u)$

Ta có :

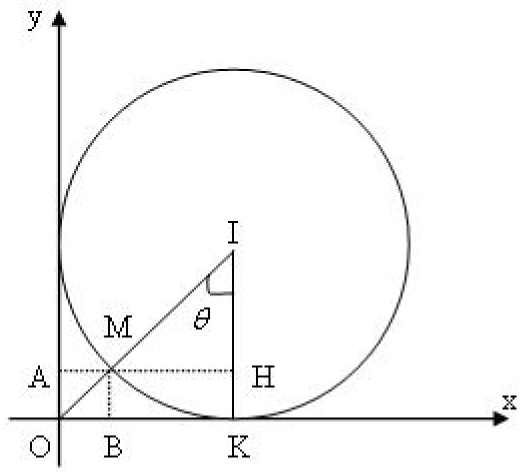
$$\cos(\mathbf{t}, u) = \frac{\mathbf{t}.u}{|t|\,.\,|u|} = \frac{3t.6t}{\sqrt{2}.\sqrt{9 + 36t^2 + 36t^4}} = \frac{3t.6t^2}{(3 + 6t^2).\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Bài tập 2.9.

(a)

Theo Hình 2.0.3, ta có

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{IH}{IM} = IK - IH = 1 - \cos\theta \\ \Rightarrow MH &= |\cos\theta| \\ OK &= l(KM) = IK.\theta = \theta \\ x &= OB = OK - MH = \theta - \sin\theta \\ \Rightarrow C(\theta) &= (\theta - \sin\theta, 1 - \cos\theta) \end{aligned}$$



Hình 2.0.3:

Suy ra

$$
\begin{aligned}
|C'(\theta)| &= \sqrt{(1-\theta)^2+\sin^2\theta} \\
&= \sqrt{1-2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta} \\
&= \sqrt{2(1-\cos\theta)} \Longleftrightarrow |C'(\theta)| = 0
\end{aligned}
$$

$$\Longleftrightarrow 1-\cos\theta = 0$$

$$\Longleftrightarrow \cos\theta = 0$$

$$\Longleftrightarrow \theta = k2\pi \ , k\in\mathbb{Z}$$

Do đó $C(k2\pi) = (k2\pi, 0)$

Vậy những điểm $(k2\pi, 0)$ là những điểm kì dị của $C(\theta)$.

(b) Độ dài một nhịp của đường Cycloit.

$$l = \int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos\theta)}d\theta = \int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}}d\theta = \int_0^{2\pi} 2.\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|d\theta$$

$$= 4\int_0^{2\pi}\sin\frac{\theta}{2}d\theta = -4.2.\cos\frac{\theta}{2}\ |_0^{\pi}$$

$$= 8.$$

Bài tập 2.10.

(a) Ta có $c(t) = (t, t^2), c^{'}(t) = (1, 2t), |c^{'}(t)| = \sqrt{1+4t^2}$

Vậy $l = \int\limits_A^B |c^{'}(t)|dt = \int\limits_A^B \sqrt{1+4t^2}dt$

Đặt $u = \sqrt{\frac{1}{4}+t^2} \Rightarrow du = \dfrac{t}{\sqrt{\frac{1}{4}+t^2}}dt$

$dv = dt \Rightarrow v = t$

$\Rightarrow \frac{1}{2}l = t\sqrt{\frac{1}{4}+t^2}\Big|_A^B - \int\limits_A^B \dfrac{t}{\sqrt{\frac{1}{4}+t^2}}dt$

$= t\sqrt{\frac{1}{4}+t^2}\Big|_A^B - \int\limits_A^B \sqrt{\frac{1}{4}+t^2}dt + \int\limits_A^B \frac{1}{4}.\dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+t^2}}dt$

Đặt $x = t + \sqrt{\frac{1}{4}+t^2} \Rightarrow \frac{1}{x}dx = \dfrac{dt}{\sqrt{\frac{1}{4}+t^2}}$

Vậy $l = (t\sqrt{\frac{1}{4}+t^2} + \frac{1}{4}\ln(t+\sqrt{\frac{1}{4}+t^2}))|_A^B$

(b) $c : t \mapsto (t, \ln t)$

$c^{'}(t) = (1, \frac{1}{t}) \Rightarrow |c^{'}(t)| = \sqrt{1+\frac{1}{t^2}}$

$\Rightarrow l = \int\limits_A^B |c^{'}(t)|dt = \int\limits_A^B \sqrt{1+\frac{1}{t^2}}dt$

Đặt $u = \sqrt{1+\frac{1}{t^2}} \Rightarrow du = -\dfrac{2}{t^3.\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}}$

$du = dt \Rightarrow v = t$

$\Rightarrow l = t\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}\Big|_A^B + 2\int\limits_A^B \dfrac{t}{t^3\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}}dt$

$= t\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}\Big|_A^B + 2\int\limits_A^B \dfrac{1}{t^2\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}}dt$

Đặt $x = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2}dt \Rightarrow \int\limits_A^B \dfrac{1}{t^2\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}}dt = -\int\limits_A^B \dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

Đặt $y = x + \sqrt{1+x^2} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

Vậy $l = \left[t\sqrt{1+\frac{1}{t^2}} - 2\ln\left(\frac{1}{t}+\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}\right)\right]\Big|_A^B$

(c) $c : t \mapsto (t, \cosh\frac{t}{a})$

$$c^{'}(t) = (1, -\sinh\frac{t}{a})$$
$$l = \int_A^B |c^{'}(t)|dt = \int_A^B \sqrt{1+\sinh^2\frac{t}{a}}dt$$
$$= \int_A^B \sqrt{\cosh^2\frac{t}{a}}dt = \int_A^B \left|\cosh\frac{t}{a}\right| dt$$
$$= \left|\int_A^B \cosh\frac{t}{a}dt\right| = a\left|\sinh\frac{t}{a}\right|\Big|_A^B$$

(d)

$$c : t \longmapsto (a\sin t, a(1-\cos t)) \quad a > 0$$
$$\Longrightarrow C'(t) = (a\cos t, a\sin) \quad a > 0$$
$$\Longrightarrow l = \int_A^B |C'(t)|dt = \int_A^B \sqrt{a^2(\cos^2 t + \sin^2 t)}dt$$
$$= \int_A^B a.dt = a(B-A)$$

(e)

$$c : t \longmapsto \left(a(\ln\tan\frac{t}{2} + \cos t), a\sin t\right) \quad a > 0$$
$$\Longrightarrow C'(t) = \left(a(\frac{1}{\sin t} - \sin t), a\cos t\right)$$

$$\Longrightarrow |c'(t)| = a^2\sqrt{\frac{\cos^4}{\sin^2 t} + \cos^2 t} = a|\cos t|.\sqrt{\frac{\cos^2}{\sin^2 t} + 1}$$
$$= \frac{a|\cos t|}{|\sin t|} = a.\cot t$$
$$\Longrightarrow \int_A^B = |c'(t)|dt = \int_A^B a\cot t.dt = a.\int_A^B \frac{\cos t}{\sin t}dt$$
$$= a.\int_A^B \frac{d(\sin t)}{\sin t} = a\ln\sin t|_A^B$$
$$= a\ln\frac{\sin B}{\sin A}$$

Bài tập 2.11.

(a) $c(t)$ giao với mặt phẳng $y = 0$ khi $1 - \cos t = 0 \Rightarrow t = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
Chọn $k = 0, 1$ ta được $t_1 = 0, t_2 = 2\pi$.

Ta có $c^{'}(t) = \big(a(1-\cos t), a\sin t, -2a\sin t/2\big)$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow |c^{'}(t)| &= \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t + 4a^2\sin^2 t/2}\\
&= a\sqrt{2 - 2\cos t + 2(1-\cos t)}\\
&= 2a\sqrt{1-\cos t}\\
\Rightarrow l &= \int\limits_0^{2\pi} |c^{'}(t)|dt = 2a\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}dt\\
&= 2\sqrt{2}a\int\limits_0^{2\pi}|\sin t/2|dt = 8\sqrt{2}a.
\end{aligned}$$

(b) $c : t \mapsto (\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t)$. Dễ thấy đường tham số đã cho có chu kì 2π.
Ta có $c^{'}(t) = (-3\cos^2 t\sin t, 3\sin^2 t\cos t, -2\sin 2t)$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow l &= \int\limits_0^{2\pi}|c^{'}(t)|dt = \int\limits_0^{2\pi}\sqrt{9\cos^4 t\sin^2 t + 9\sin^4 t\cos^2 t + 4\sin^2 2t}dt\\
&= \int\limits_0^{2\pi}\sqrt{25\cos^2 t\sin^2 t}dt = \frac{5}{4}\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{\sin^2 2t}dt\\
&= \frac{5}{2}\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2tdt - \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin 2tdt + \int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\sin 2tdt - \int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\sin 2tdt\right)\\
&= \frac{5}{4}\left(-\cos 2t|_0^{\frac{\pi}{2}} + \cos 2t|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \cos 2t|_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} + \cos 2t|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\right) = 10.
\end{aligned}$$

Bài tập 2.12. Ta có

$$\begin{cases} x^3 = 3a^2y \\ 2xz = a^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x^3}{3a^2} \\ z = \dfrac{a^2}{2x} \end{cases}$$

Suy ra đường cong (c) có tham số hóa là

$$c(t) = \left(t, \frac{t^3}{3a^2}, \frac{a^2}{2t}\right)$$

Khi $y = \dfrac{a}{3} \Longrightarrow \dfrac{t^3}{3a^2} = \dfrac{a}{3} \Longrightarrow t = a.$

Khi $y = 9a \Longrightarrow \dfrac{t^3}{3a^2} = 9a \Longrightarrow t = 3a.$

Vậy độ dài phần đường cong cần tìm bằng

$$\begin{aligned} l(c) &= \int_a^{3a} |c(t)|dt = \int_a^{3a} \sqrt{1 + \frac{t^4}{a^4} + \frac{a^4}{4a^4}}dt = \int_a^{3a} \sqrt{\frac{(2t^4 + at)^2}{4a^4t^4}}dt \\ &= \int_a^{3a} \frac{2a^4 + a^4}{4a^2t^2}dt = \int_a^{3a} \left(\frac{t^2}{a} + \frac{a^2}{2t^2}\right) dt \\ &= \left(\frac{t^3}{3a} - \frac{a^2}{2t}\right)\Big|_a^{3a} = 9a. \end{aligned}$$

Bài tập 2.13.

(a) Lấy P nằm trên đường xixoit. Ta có $P\left(\dfrac{2at^2}{1+t^2}, \dfrac{2at^3}{1+t^3}\right)$

Phương trình đường thẳng $OP: tx - y = 0$.

Giao điểm B của (OP) với đường thẳng $x = 2a$ có tọa độ $B(2a, 2at)$.

Giao điểm C của (OP) với đường tròn $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ có tọa độ

$$C\left(\frac{2a}{1+t^2}, \frac{2at}{1+t^2}\right).$$

Ta có:

$$OP = \sqrt{\frac{4a^2t^4 + 4a^2t^6}{(1+t^2)^2}} \quad BC = \sqrt{\frac{4a^2t^4 + 4a^2t^6}{(1+t^2)^2}}.$$

Vậy $OP = BC$.

Phương trình tham số của đường tròn (C) : $\begin{cases} x = a\cos t + a \\ y = a\sin t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$

$C \in (C) : C(t) = (a\cos t_0 + a, \sin t_0)$.

Phương trình (OC) : $\begin{cases} x = t(a\cos t_0 + a) \\ y = t\sin t_0 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

$P \in (OC) \Longrightarrow P(t_1(\cos t_0 + a), t_1 \sin t)$

$B = OC \cap AV \Longrightarrow B\left(2a, \dfrac{2a\sin t_0}{\cos t_0 + 1}\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{CB} = \left(a - a\cos t_0, \dfrac{a\sin t}{1+\cos t_0}(1-\cos t_0)\right)$

$P \in (OC) \Longrightarrow P(t_1(\cos t_0 + 1), t_1 \sin t_0)$.

Suy ra $CB^2 = 2a^2(1-\cos t_0)^2.\dfrac{1}{1+\cos t_0}$, $OP^2 = 2t^2(1+\cos t_0)$.

Do $CB^2 = OP^2$ nên

$$2a^2(1-\cos t_0)^2.\frac{1}{1+\cos t_0} = 2t^2(1+\cos t_0)$$

$$\Longrightarrow t_1^2 = \frac{a^2(1-\cos t_0)^2}{(1+\cos t_0)^2}$$

$$\Longrightarrow t_1 = \frac{a(1-\cos t_0)}{1+\cos t_0}$$

$$\Longrightarrow P = \left(a(1-\cos t_0), a\sin t_0.\frac{1-\cos t_0}{1+\cos t_0}\right)$$

Đặt $t_2 = \dfrac{1+\cos t}{\sin t_0}$. Khi đó, ta có:

$$\left(\frac{2at_2^2}{1+t_2^2}, \frac{2at_2^3}{1+t_2^2}\right) = \left(a(1-\cos t_0), a\sin t_0.\frac{1-\cos t_0}{1+\cos t_0}\right) \equiv P$$

(b) Ta có

$$\alpha'(t) = \Big(\frac{4at}{(1+t^2)^2}, \frac{6at^2+2at^4}{(1+t^2)^2}\Big)$$
$$\Longrightarrow \alpha'(t) = (0,0).$$

Vậy $O(0,0)$ là điểm kì dị duy nhất của đường xixoit.

(c) Chọn $M\left(\dfrac{2at^2}{1+t_0^2}, \dfrac{2at^3}{1+t_0^2}\right) \in \alpha(t)$

$$d(M,\Delta) = \frac{\left|\dfrac{2at_0^2}{1+t_0^2} - 2a\right|}{\sqrt{1^2+0^2}} = \frac{2a}{1+t_0^2}$$

Suy ra

$$\lim_{t_0\to\infty} d(M,\Delta) = \lim_{t_0\to\infty} \frac{2a}{1+t_0^2} = 0$$

Ta có

$$\lim_{t_0\to\infty} \alpha'(t) = \lim_{t_0\to\infty} \left(\frac{4at}{(1+t^2)^2}, \frac{6at^2+2at^4}{(1+t^2)^2}\right) = (0,2a).$$

Vậy, khi $t\to\infty$ thì $c(t)$ dần về đường thẳng $x=2a$ và $\alpha'(t)\to(2a,0)$.

Bài tập 2.14.

(a) Ta có $x(t)=\sin t$ là hàm sơ cấp khả vi trên $(0,\pi)$ và $y(t)=\cos t+\ln(\tan\dfrac{t}{2})$ xác định trên $(0,\pi)$ và khả vi trên $(0,\pi)$.

Do đó $\alpha(t)$ khả vi trên $(0,\pi)$.

Ta cũng có $\alpha'(t) = \left(\cos t, -\sin t + \dfrac{1}{\sin t}\right)$

$$\begin{aligned}
\alpha'(t) = (0,0) &\Longleftrightarrow \begin{cases} \cos t = 0 \\ -\sin t + \dfrac{1}{\sin t} = 0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} \cos t = 0 \\ \dfrac{1+\sin^2 t}{\sin t} = 0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} \cos t = 0 \\ \cos^2 t = 0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \cos t = 0 \\
&\Longleftrightarrow t = \pm\frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \ (*)
\end{aligned}$$

Vì $t \in (0, \pi)$ nên ta có tại $t = \dfrac{\pi}{2}$ thì $\alpha'(t) = 0$

Do đó $\alpha(t)$ không chính quy tại $t = \dfrac{\pi}{2}$.

(b) Lấy $M\left(\sin t_0, \cos t_0 + \ln(\tan \dfrac{t_0}{2})\right) \in \alpha(t)$

Ta có

$$\mathbf{t}(t_0) = \frac{\alpha'}{|\alpha'|} = \frac{1}{\sqrt{-1 + \dfrac{1}{\sin^2 t_0}}}\left(\cos t_0, -\sin t_0 + \frac{1}{\sin t_0}\right)$$

Tiếp tuyến đi qua M nhận $\mathbf{t}(t_0)$ làm vector chỉ phương có phương trình là

$$(d): \begin{cases} x = \sin t_0 + t\cos t_0 \\ y = \cos t_0 + \ln(\tan \dfrac{t_0}{2}) + (-\sin t_0 + \dfrac{1}{\sin t_0})t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Gọi $N = d \cap Oy$. Khi đó $x_N = 0 \Longrightarrow y_N = \ln(\tan \dfrac{t_0}{2})$

Suy ra $N\left(0, \ln(\tan \dfrac{t_0}{2})\right)$

$$MN = \sqrt{\sin^2 t_0 + (\ln\tan\frac{t_0}{2} - \cos t_0 - \ln\tan\frac{t_0}{2})^2} = \sqrt{\sin^2 t_0 + \cos^2 t_0} = 1.$$

Bài tập 2.15.

(a) Ta có $\alpha^{'}(t) = \left(\dfrac{3a - 6at^3}{(1+t^3)^2}, \dfrac{6at - 33at^4}{(a+t^3)^2}\right)$.

Tại $t = 0$, ta được $\alpha(0) = (0,0)$.

$\alpha^{'}(0) = (3a, 0) \Rightarrow \alpha^{'}$ tiếp xúc với Ox.

(b) Ta có: $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{3at}{1+t^3} = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\dfrac{3a}{t^2}}{\dfrac{1}{t^3}+1} = 0$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{3at^2}{1+t^3} = \lim_{t\to\infty} \frac{\dfrac{3a}{t}}{\dfrac{1}{t^3}+1} = 0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \alpha(t) = (0,0)$$

Tương tự ta cũng có

$$\lim_{t\to\infty} \frac{3a - 6at^3}{(1+t^3)^2} = \lim_{t\to\infty} \frac{\dfrac{3a}{t^3} - 6a}{\left(\dfrac{1}{t^{\frac{3}{2}}} + t^{\frac{3}{2}}\right)^2} = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{6at - 6at^4}{(1+t^3)^2} = \lim_{t\to\infty} \frac{\dfrac{6a}{t^3} - 3a}{\left(\dfrac{1}{t^2} + t^2\right)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} \alpha^{'}(t) = (0,0).$$

(c) Tham số hóa của đường với định hướng ngược lại là

$$\alpha(-t) = \left(\frac{-3at}{1-t^3}, \frac{3at^2}{1-t^3}\right)$$

Khoảng cách từ $\alpha(t)$ đến đường thẳng Δ

$$d = \frac{\left|\dfrac{3at}{(1+t^3)} + \dfrac{3at^2}{(1+t^3)} + a\right|}{\sqrt{2}} = \frac{\left|\dfrac{3at + 3at^2 + at^3 + a}{(1+t^3)}\right|}{\sqrt{2}} = \frac{|a|\left|\dfrac{(1+t)^3}{1+t^3}\right|}{\sqrt{2}} = \frac{|a|\left|\dfrac{(1+t)^2}{1-t+t^2}\right|}{\sqrt{2}}$$

Do đó

$$\lim_{t\to-1} d = \lim_{t\to-1} \frac{|a|\left|\dfrac{(1+t)^2}{1-t+t^2}\right|}{\sqrt{2}} = 0$$

Ta có vector chỉ phương của tiếp tuyến tại $\alpha(t)$ là vector cùng phương với vector $\alpha^{'}(t)$ là vector $\overrightarrow{u} = (3a - 6at^3, 6at - 3at^4)$

Khi đó $\lim\limits_{t\to -1} \overrightarrow{u} = \lim\limits_{t\to -1}(3a - 6at^3, 6at - 3at^4) = (9a, -9a)$. Vector $(9a, -9a)$ cùng phương với vector $(1, -1)$ cũng là vector chỉ phương của đường thẳng

$$(l) : x + y + a = 0.$$

Vậy khi $t \to -1$. Đường cong và tiếp tuyến của nó tiến tới đường thẳng

$$x + y + a = 0$$

Bài tập 2.16.

(a) $\alpha(t) = (a\mathrm{e}^{bt}\cos t, a\mathrm{e}^{bt}\sin t),\ t \in \mathbb{R}, a > 0, b < 0$

Ta có

$$0 < a\mathrm{e}^{bt}\cos t < a\mathrm{e}^{bt} \longrightarrow 0,\ (t \to \infty)$$

$$\Longrightarrow a\mathrm{e}^{bt}\cos t \longrightarrow 0 \text{ khi } t \to \infty$$

Tương tự ta có

$$a\mathrm{e}^{bt}\sin t \longrightarrow 0 \text{ khi } t \to \infty$$

Vậy $\alpha(t) \longrightarrow O(0,0)$ khi $t \to \infty$

(b) $\alpha'(t) = (ab\mathrm{e}^{bt}\cos t - a\mathrm{e}^{bt}\sin t, ab\mathrm{e}^{bt}\sin t + a\mathrm{e}^{bt}\cos t)$

Ta có

$$\lim_{t\to\infty}(ab\mathrm{e}^{bt}\cos t - a\mathrm{e}^{bt}\sin t) = \lim_{t\to\infty}(ab\mathrm{e}^{bt}\cos t) - \lim_{t\to\infty}(a\mathrm{e}^{bt}\sin t) = 0$$

Tương tự

$$\lim_{t\to\infty} ab\mathrm{e}^{bt}\sin t + a\mathrm{e}^{bt}\cos t) = 0$$

Vậy $\alpha'(t) \to (0,0)$ khi $t \to \infty$.

Mặt khác ta có $|\alpha'(t)| = a\mathrm{e}^{bt}.\sqrt{b^2+1}$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow \lim_{t_0\to\infty}\int_{t_0}^{t} a\mathrm{e}^{bt}.\sqrt{b^2+1}dt &= a\sqrt{b^2+1}.\lim_{t_0\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{bt}}{t_0}\Big|_{t_0}^{t}\\ &= \frac{a\sqrt{b^2+1}}{b}\lim_{t_0\to\infty}(\mathrm{e}^{bt} - \mathrm{e}^{bt_0})\\ &= -\frac{a\sqrt{b^2+1}}{b}.\mathrm{e}^{bt_0}\end{aligned}$$

Vậy $\lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_{t_0}^{t}|\alpha'(t)|dt$ là hữu hạn.

Bài tập 2.17. Áp dụng định lý giá trị trung bình cho các hàm x, y, z.

Bài tập 2.18.

(a) Ta có

$$\begin{aligned}(q-p)\overrightarrow{v} &= (\alpha(b)-\alpha(a))\overrightarrow{v}\\ &= \alpha(t)\overrightarrow{v}\Big|_a^b\\ &= \int\limits_a^b (\alpha'(t)\overrightarrow{v} + \alpha(t)\overrightarrow{v}')dt\end{aligned}$$

Do $\overrightarrow{v}$ là hằng nên $\overrightarrow{v}' = 0$.

Suy ra $(q-p)\overrightarrow{v} = \int\limits_a^b \alpha'(t).\overrightarrow{v}dt \qquad (1)$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopki ta có

$$|\alpha'(t)\overrightarrow{v}| \le |\alpha'(t)|.|\overrightarrow{v}| = |\alpha'(t)|$$

$$\int\limits_a^b \alpha'(t).\overrightarrow{v}dt \le |\int\limits_a^b \alpha'(t).\overrightarrow{v}dt| \le \int\limits_a^b |\alpha'(t).\overrightarrow{v}|dt \le \int\limits_a^b |\alpha'(t)|dt \quad (2)$$

Từ $(1), (2)$, suy ra

$$(q-p)\overrightarrow{v} = \int\limits_a^b \alpha'(t).\overrightarrow{v}dt \le \int\limits_a^b |\alpha'(t)|dt.$$

(b) Đặt $\overrightarrow{v} = \dfrac{(q-p)}{|p-q|}$, theo Câu (a) ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_a^b |\alpha'(t)|dt &\ge (q-p)\overrightarrow{v} = (q-p).\frac{q-p}{p-q}\\ &= \frac{(q-p)^2}{p-q} = |p-q|\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \int\limits_a^b |\alpha'(t)|dt \ge |\alpha(b)-\alpha(a)|.$$

Bài tập 2.19. Giả sử $\alpha = (x, y)$ với $|\alpha^{'}| = 1$. Khi đó ta có:

$$\begin{cases} x^{'}(s) = \cos\varphi(s) \\ y^{'}(s) = \sin\varphi(s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^{''}(s) = -\varphi^{'}(s)\sin\varphi(s) \\ y^{''}(s) = \varphi^{'}(s)\cos\varphi(s) \end{cases}$$

Theo giả thiết:

$$
\begin{aligned}
& k = \varphi^{'}(s)\cos^2\varphi(s) + \varphi^{'}(s)\sin^2\varphi(s) = \varphi^{'}(s) \\
& \Rightarrow \varphi^{'}(s) = \text{const} \\
& \Rightarrow \varphi(s) = cs + a \\
& \Rightarrow \begin{cases} x^{'}(s) = \cos(cs+a) \\ y^{'}(s) = \sin(cs+a) \end{cases}
\end{aligned}
$$

Vậy, $\alpha = \left(\frac{-1}{c}\cos(cs+a) + c_1, \frac{1}{c}\sin(cs+a) + c_2 \right)$.

Do đó α có vết nằm trên đường tròn $C(I,r)$ với $I(c_1,c_2)$, $r = \frac{1}{|c|} = \frac{1}{|k|}$.

Bài tập 2.20.

(a) $c^{'} = (2t, 1, 3t^2)$, $c^{''} = (2, 0, 6t)$, $c^{'''} = (0, 0, 6)$.

Suy ra $c^{'} \wedge c^{''} = (-6t, -6t^2, 2)$,

$c^{'2} = 4t^2 + 1 + 9t^4$, $|c^{'}| = \sqrt{4t^2 + 1 + 9t^4}$

$(c^{'} \wedge c^{''})^2 = 36t^2 + 36t^4 + 4$, $(c^{'}, c^{''}, c^{'''}) = 12$

$\mathbf{t} = \left(\frac{2t}{\sqrt{4t^2+1+9t^4}}, \frac{-1}{\sqrt{4t^2+1+9t^4}}, \frac{3t^2}{\sqrt{4t^2+1+9t^4}} \right)$

$\mathbf{b} = \left(\frac{-3t}{\sqrt{9t^4+9t^2+1}}, \frac{-3t^2}{\sqrt{9t^4+9t^2+1}}, \frac{1}{\sqrt{9t^4+9t^2+1}} \right)$

$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{9t^4+9t^2+1}\sqrt{4t^2+1+9t^4}} \left(-9t^4 - 1, t(2+9t^2), 3t(1+2t^2) \right)$

$k = \frac{2\sqrt{9t^4+9t^2+1}}{(4t^2+1+9t^4)^{3/2}}$

$\tau = \frac{3}{9t^4+9t^2+1}$

(b) $c(t) = a\cosh t, a\sinh t, at)$

$c^{'} = (a\sinh t, a\cosh t, a)$

$c^{''} = (a\cosh t, a\sinh t, 0)$

$c^{'''} = (a\sinh t, a\cosh t, 0)$

$c^{'} \wedge c^{''} = (-a^2\sinh t, a^2\cosh t, -a^2)$

$c^{'2} = 2a^2\cosh^2 t$

$|c^{'}| = a\sqrt{2}\cosh t$

$(c^{'} \wedge c^{''})^2 = 2a^4\cosh^2 t$

$|c^{'} \wedge c^{''}| = a^2\sqrt{2}\cosh t$

$(c^{'}, c^{''}, c^{'''}) = a^3$

$$\mathbf{t} = \left(\frac{\sinh t}{\sqrt{2}\cosh t}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}\cosh t}\right)$$
$$\mathbf{b} = \left(\frac{-\sinh t}{\sqrt{2}\cosh t}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}\cosh t}\right)$$
$$\mathbf{n} = \left(\frac{1}{\cosh t}, 0, \frac{-\sinh t}{\cosh t}\right)$$
$$k = \frac{1}{2\cosh^2 t}$$
$$\tau = \frac{1}{2a\cosh^2 t}$$

(c) $c(t) = (e^t, e^{(-t)}, \sqrt{2}t)$

$$c' = (e^t, -e^{(-t)}, \sqrt{2})$$
$$c'' = (e^t, e^{(-t)}, 0)$$
$$c''' = (e^t, -e^{(-t)}, 0)$$
$$c' \wedge c'' = (-\sqrt{2}e^{(-t)}, \sqrt{2}e^t, 2)$$
$$|c'| = \frac{e^{2t}+1}{e^t}$$
$$|c' \wedge c''| = \frac{\sqrt{2}(e^{2t}+1)}{e^t}$$
$$(c', c'', c''') = -2\sqrt{2}$$
$$\mathbf{t} = \left(\frac{e^{2t}}{e^{2t}+1}, \frac{-1}{e^{2t}+1}, \frac{\sqrt{2}e^t}{e^{2t}+1}\right)$$
$$\mathbf{b} = \left(\frac{-1}{e^{2t}+1}, \frac{e^{2t}}{e^{2t}+1}, \frac{\sqrt{2}e^t}{e^{2t}+1}\right)$$
$$\mathbf{n} = \left(\frac{\sqrt{2}e^t}{e^{2t}+1}, \frac{\sqrt{2}e^t}{e^{2t}+1}, \frac{1-e^{2t}}{e^{2t}+1}\right)$$
$$k = \frac{\sqrt{2}e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2}$$
$$\tau = \frac{-\sqrt{2}e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2}$$

(d) $c(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t)$

$$c' = (-3\cos^2 t\sin t, 3\sin^2 t\cos t, -2\sin 2t)$$
$$c'' = (6\sin^2 t\cos t - 3\cos^3 t, 6\cos^2 y\sin t - 3\sin^3 t, -4\cos 2t)$$
$$c''' = (21\sin t\cos^2 t - 6\sin^3 t, -21\cos y\sin^2 t + 6\cos^3 t, 8\sin 2t)$$
$$c' \wedge c'' = (12\sin^2 t\cos^3 t, -12\sin^3 t\cos^2 t, -9\sin^2 t\cos^2 t)$$
$$|c'| = 5\sqrt{\sin^2 t\cos^2 t}$$
$$|c' \wedge c''| = 15\sin^2 t\cos^2 t$$
$$(c', c'', c''') = 36\sin^3 t\cos^3 t$$
$$\mathbf{t} = \left(\frac{-3\cos^2 t\sin t}{\sqrt{\sin^2 t\cos^2 t}}, \frac{3\sin^2 t\cos t}{\sqrt{\sin^2 t\cos^2 t}}, \frac{-2\sin 2t}{\sqrt{\sin^2 t\cos^2 t}}\right)$$

$\mathbf{b} = \left(\frac{4\cos t}{5}, \frac{-4\sin t}{5}, \frac{-3}{5}\right)$

$\mathbf{n} = \left(\frac{\sin^2 t\cos t}{\sqrt{\sin^2 t\cos^2 t}}, \frac{\sin t\cos^2 t}{\sqrt{\sin^2 t\cos^2 t}}, 0\right)$

$k = \frac{3}{25\sqrt{\sin^2 t\cos^2 t}}$

$\tau = \frac{4}{25\sin t\cos t}$

(e) $c(t) = (2t, \ln t, t^2)$

$c^{'} = (2, \frac{1}{t}, 2t)$, $c^{''} = (0, \frac{-1}{t^2}, 0)$, $c^{'''} = (0, \frac{2}{t^3}, 0)$.

$c^{'} \wedge c^{''} = (\frac{4}{t}, -4, \frac{-2}{t^2})$, $|c^{'}| = \frac{1+2t^2}{t}$.

$|c^{'} \wedge c^{''}| = \frac{2(1+2t^2)}{t^2}$, $(c^{'}, c^{''}, c^{'''}) = \frac{-8}{t^3}$.

$\mathbf{t} = \left(\frac{2t}{1+2t^2}, \frac{1}{1+2t^2}, \frac{2t^2}{1+2t^2}\right)$

$\mathbf{b} = \left(\frac{2t}{1+2t^2}, \frac{-2t^2}{1+2t^2}, \frac{-1}{1+2t^2}\right)$

$\mathbf{n} = \left(\frac{1-2t^2}{1+2t^2}, \frac{-2t}{1+2t^2}, \frac{2t}{1+2t^2}\right)$

$k = \frac{2t}{(1+2t^2)^2}$, $\tau = \frac{-2t}{(1+2t^2)^2}$.

Bài tập 2.21.

(a) Ta có

$$\begin{aligned}\alpha'(s) &= \left(-\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c}, \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c}, \frac{b}{c}\right)\\ \Longrightarrow |\alpha'(s)| &= \sqrt{\frac{a^2}{c^2}\left(\sin^2\frac{s}{c} + \cos^2\frac{s}{c}\right) + \frac{b^2}{c^2}}\\ &= \sqrt{\frac{a^2+b^2}{c^2}} = 1.\end{aligned}$$

Vậy tham số s là độ dài cung.

(b) Ta có

$$\alpha''(s) = \left(-\frac{a}{c^2}\cos\frac{s}{c}, -\frac{a}{c^2}\sin\frac{s}{c}, 0\right)$$

Hàm độ cong $k(s) = |\alpha''(s)| = \sqrt{\frac{a^2}{c^4}\cos^2\frac{s}{c} + \frac{a^2}{c^4}\sin\frac{s}{c}} = \frac{a}{c^2}$

Tìm hàm độ xoắn

Ta có

$$\begin{aligned}
\mathbf{n} &= \frac{\alpha''(s)}{|\alpha''(s)|} = \frac{c^2}{a}\left(-\frac{a}{c^2}\cos\frac{s}{c}, -\frac{a}{c^2}\sin\frac{s}{c}, 0\right)\\
\mathbf{t} &= \alpha'(s) = \alpha'(s) = \left(-\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c}, \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c}, \frac{b}{c}\right)\\
\mathbf{b} &= \mathbf{t}\wedge\mathbf{n} = \left(-\frac{b}{c}\sin\frac{s}{c}, \frac{b}{c}\cos\frac{s}{c}, \frac{a}{c}\right)\\
&\Longrightarrow \mathbf{b}' = \left(-\frac{b}{c^2}\cos\frac{s}{c}, -\frac{b}{c^2}\cos\frac{s}{c}, 0\right).
\end{aligned}$$

Suy ra $\tau = -\dfrac{b}{c^2}$

(c) Mặt phẳng mặt tiếp của $\alpha(s)$ qua điểm

$$\alpha(s_0) = \left(a\cos\frac{s_0}{c}, a\sin\frac{s_0}{c}, b\frac{s_0}{c}\right)$$

và nhận

$$\mathbf{b}(s_0) = \left(-\frac{b}{c}\sin\frac{s_0}{c}, \frac{b}{c}\cos\frac{s_0}{c}, \frac{a}{c}\right)$$

làm vector pháp tuyến nên nó có phương trình:

$$\begin{aligned}
&-\frac{b}{c}\sin\frac{s_0}{c}\left(x - a\cos\frac{s_0}{c}\right) + \frac{b}{c}\cos\frac{s_0}{c}\left(y - a\sin\frac{s_0}{c}\right) + \frac{a}{c}\left(z - b\frac{s_0}{c}\right) = 0\\
\Longleftrightarrow &- \frac{b}{c}\sin\frac{s_0}{c}.x + \frac{b}{c}\cos\frac{s_0}{c}.y + \frac{a}{c}.z + \frac{abs_0}{c^2} = 0.
\end{aligned}$$

(d) Ta có $\mathbf{n}(t) = \left(a\cos\frac{s}{c} - a\cos\frac{s}{c}.t, \sin\frac{s}{c} - a\sin\frac{s}{c}.t, \frac{bs}{c}\right)$

Đặt $N = \mathbf{n}(t)\bigcap Oz$, suy ra $N(0,0,bs/c)$.

$$\Longrightarrow \cos(\mathbf{n}(t), Oz) = \frac{\left|0\left(-a\cos\frac{s}{c}\right) + 0\left(a\sin\frac{s}{c}\right) + 1.0\right|}{|a|} = 0.$$

$\Rightarrow$ góc giữa $n(s)$ và Oz bằng $\pi/2$.

(e) Ta có

$$\begin{aligned}
\cos(\mathbf{t}(s), Oz) &= \frac{\left|0\left(-\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c}\right) + 0\left(a\cos\frac{s}{c}\right) + 1.\frac{b}{c}\right|}{|1.1|}\\
&= |b/c| = \text{const}.
\end{aligned}$$

Bài tập 2.22. Ta có:

$$\begin{aligned} c'(t) &= \Big(a(1-\cos t), a\sin t, -2a\sin\frac{t}{2}\Big) \\ &= \Big(a(2-2\cos^2\frac{t}{2}), 2a\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}, -2a\sin\frac{t}{2}\Big) \\ c"(t) &= \Big(2a\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}, a(2\cos^2\frac{t}{2}-1), -a\cos\frac{t}{2}\Big) \end{aligned}$$

Khi đó ta được:

$$\begin{aligned} c'(t)\wedge c"(t) &= \sqrt{4a^2\sin^6\frac{t}{2}+4a^2\sin^4\frac{t}{2}\cos^2\frac{t}{2}+4a^4\sin^4\frac{t}{2}} \\ &= \sqrt{8a^2\sin^4\frac{t}{2}} = 2\sqrt{2}a\sin^2\frac{t}{2}. \\ |c'(t)|^3 &= \sqrt{\Big(8a^2\sin^4\frac{t}{2}\Big)^3} \\ &= 16\sqrt{2}a^3\sin^3\frac{t}{2}. \end{aligned}$$

Suy ra độ cong của đường tham số trên là:

$$\begin{aligned} k(t) &= \frac{c'(t)\wedge c"(t)}{|c'(t)|^3} = \frac{2\sqrt{2}a\sin^2\frac{t}{2}}{16\sqrt{2}a^3\sin^3\frac{t}{2}} \\ &= \frac{1}{8a\sin\frac{t}{2}}. \end{aligned}$$

Khi đó bán kính cong của đường đã cho bằng

$$r(t) = \frac{1}{k(t)} = 8a\sin\frac{t}{2}$$

Để bán kính cong đạt cực trị địa phương thì

$$r'(t) = 0 \Leftrightarrow \cos\frac{t}{2} = 0 \Leftrightarrow t = \pi + k2\pi$$

Suy ra các điểm làm cho bán kính cong đạt cực trị địa phương ứng với

$$t = \pi + k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Bài tập 2.23. Giả sử tham số là độ dài cung và gọi $\vec{e}$ là vector cố định. Theo giả thiết ta có:

$$\vec{e}.\mathbf{t} = 0,\ \Longrightarrow \vec{e}.\mathbf{t}' = 0,\ \Longrightarrow k.(\vec{e}.\mathbf{n}) = 0$$

Do giả thiết song chính quy nên $k \neq 0$. Từ đó suy ra $\vec{e}.\mathbf{n} = 0$ (1), lấy đạo hàm hai vế biểu thức (1), ta được

$$\vec{e}.\mathbf{n}^{'} = 0 \implies \vec{e}(-k.\mathbf{t} + \tau.\mathbf{b}) = 0.$$

Do $\vec{e}.\mathbf{t} = 0$ nên $\vec{e}.\tau.\mathbf{b} = 0$.

Mặt khác $\vec{e}.\mathbf{n} = \vec{e}.\mathbf{t} = 0$ nên $\vec{e}.\mathbf{b} \neq 0$. Suy ra $\tau = 0$.

Vậy đường cong đã cho là một đường cong phẳng.

Bài tập 2.24.

(a) Giả sử c là tham số hóa với tham số độ dài cung và gọi α là điểm cố định. Theo giả thuyết ta có: $(c(s) - a) = \lambda c^{'}(s)$. Từ đây suy ra:

$$c^{'}(s) = \lambda c^{''}(s) + \lambda^{'} c^{'}(s).$$

Điều này có nghĩa là: $k = \dfrac{c^{''} n}{|c^{'}|^2} = 0$.

Do đó vết là một đường thẳng hoặc một phần đường thẳng.

(b) Do $\mathbf{b}' = 0$ nên $\tau = 0$.

Bài tập 2.25.

(a) $120x - 597y + 108z + 1752 = 0$.

(b) $-61/16(x - 25/8) - 3(y - 2) - 5/4(z - 9/4) = 0$.

Bài tập 2.26.

(a) Ta có

$$\begin{aligned}
c'(t) &= (-a\sin t, a\cos t, b)\\
c''(t) &= (-a\cos t, -a\sin t, 0)\\
\Longrightarrow \mathbf{t} &= \frac{c'(t)}{|c'(t)|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\sin t, a\cos t, b)\\
\mathbf{b} &= \frac{c'\wedge c''}{|c'\wedge c''|} = \frac{a}{a\sqrt{1+b^2}}(b\sin t, -b\cos t, a)\\
\Longrightarrow c'\wedge c'' &= (ab\sin t, -ab\cos t, a^2)\\
\mathbf{n} = \mathbf{b}\wedge\mathbf{t} &= \frac{-a^2-b^2}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{1+b^2}}(\cos t, \sin t, 0).
\end{aligned}$$

Pháp tuyến $\mathbf{n}$ của $c(t)$ nhận $\mathbf{n}$ làm vector chỉ phương qua điểm $c(t_0)$ có phương trình tham số là

$$\begin{cases} x = a\cos t_0 + \cos t_0 t\\ y = a\sin t_0 + \sin t_0 t\\ z = bt_0 \end{cases},\ t\in\mathbb{R}$$

Tương tự ta có phương trình tham số của các đường thẳng sau

$$\text{Tiếp tuyến } (t)\ :\begin{cases} x = a\cos t_0 - a\sin t_0 t\\ y = a\sin t_0 + a\cos t_0 t\\ z = bt_0 + bt \end{cases}$$

$$\text{Trùng pháp tuyến } (v)\ :\begin{cases} x = a\cos t_0 + b\sin t_0 t\\ y = a\sin t_0 - b\cos t_0 t\\ z = bt_0 + at \end{cases}$$

Mặt phẳng mặt tiếp qua $c(t)$ nhận $\mathbf{b}(t_0)$ làm vector pháp tuyến có phương trình là

$$\begin{aligned}
&b\sin t_0(x-a\cos t_0) - b\cos t_0(y-a\sin t_0) + a(z-bt_0) = 0\\
\Longleftrightarrow\ &b\sin t_0 x - b\cos t_0 y + az - abt_0 = 0.
\end{aligned}$$

Mặt phẳng trực đạt nhận $\mathbf{n}(t_0)$ làm vector chỉ phương và qua $c(t)$ có phương trình là

$$\cos t_0 x + \sin t_0 y - a^2 = 0.$$

(b) Gọi θ là góc tạo bởi tiếp tuyến $\alpha(t)$ và trục Oz

$$\cos\theta = \frac{|\mathbf{t}.\overrightarrow{e_3}|}{|\mathbf{t}|.|\overrightarrow{e_3}|} = \frac{|b|}{1} = |b|$$

Giả sử $M = \mathbf{n} \cap Oz$ thì tọa độ M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} a\cos t_0 + \cos t_0 t = 0 \\ a\sin t_0 + \sin t_0 t = 0 \\ bt_0 = c \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \cos t_0 t = a\cos t_0 \\ \sin t_0 t = -a\sin t_0 \end{cases} \quad (*)$$

Hệ phương trình $(*)$ luôn có nghiệm nên các pháp tuyến của $c(t)$ luôn cắt trục Oz.

Bài tập 2.27. Xét ánh xạ $\gamma :< a, b >\to< 0, 1 >, t \mapsto \gamma(t) = \dfrac{t-a}{b-a}$. Dễ thấy γ là một ánh xạ vi phôi. Khi đó đường cong $\alpha = c \circ \gamma^{-1}$ là đường cong tham số tương đương cần tìm.

Bài tập 2.28.

(a) Do $f(t), g(t)$ là các hàm trơn nên nó khả vi và $x(t) = t$ là hàm sơ cấp nên khả vi.

Từ đó ta được: $c^{'}(t) = \big(1, f^{'}(t), g^{'}(t)\big) \neq \vec{0}$ nên c là đường tham số chính qui.

(b) Với $f(t) = \sin t + t^2$ và $g(t) = \mathrm{e}^t(1-t^3)$ thì $c(t) = \big(t, \sin t + t^2, \mathrm{e}^t(1-t^3)\big)$.
Từ đó:

$$c^{'}(t) = (1, \cos t + 2t, e^t(1-t^3) - 3t^2\mathrm{e}^t)$$

Suy ra vector tiếp xúc cần tìm là:

$$c^{'}(t) = \big(1, cost + 2t, e^t(1-3t^2-t^3)\big).$$

Bài tập 2.29. Để chứng minh điều kiện cần, lấy đạo hàm của đẳng thức $|\alpha(s)|^2 = \text{const}$ 3 lần. Để chứng minh điều kiện đủ, chúng ta lấy đạo hàm

$$\beta(s) = \alpha(s) + R\mathbf{n} - R'T\mathbf{b}$$

chúng ta có

$$\begin{aligned} \beta'(s) &= \mathbf{t} + R(-k\mathbf{t} - \tau\mathbf{b}) + R'\mathbf{n} - (TR')'\,\mathbf{b} - R'\mathbf{n} \\ &= -\Big(R\tau + (TR)'\Big)\,\mathbf{b} \end{aligned}$$

Theo giả thuyết ta có $R^2 + \left(R'^2\right) T^2 = \text{const}$, lấy đạo hàm hai vế ta có

$$2RR' + 2\left(TR'\right)\left(TR'\right)' = 0$$
$$\Longrightarrow \frac{2R'}{\tau}\left(R\tau + \left(TR'\right)'\right) = 0.$$

Do $k', \tau \neq 0$ nên $\beta' = 0$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài tập 2.30.

(a) Đặt $R = \dfrac{1}{k}$, $T = \dfrac{1}{\tau}$. Để chứng minh

$$c - a = -\frac{1}{k}.\mathbf{n} - (\frac{1}{k})'.\frac{1}{\tau}.\mathbf{b} = -R\mathbf{n} - R'T\mathbf{b}$$

ta chứng minh $c + R\mathbf{n} + R'T\mathbf{b}$ là hàm hằng.

Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned}
(c + R\mathbf{n} + R'T\mathbf{b})' &= c' + R'\mathbf{n} + R\mathbf{n}' + (R'T)'.\mathbf{b} + (R'T).\mathbf{b}' \\
&= \mathbf{t} + R'\mathbf{n} + R(-k\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}) + (R'T)'\mathbf{b} + R'\frac{1}{\tau}.(-\tau\mathbf{n}) \\
&= \mathbf{t} + R'\mathbf{n} - \frac{1}{k}\mathbf{t} + R\tau\mathbf{b} + (R'T)'\mathbf{b} - R'\mathbf{n} \\
&= R\tau\mathbf{b} + (R'T)'\mathbf{b} \\
&= (R\tau + R'T)\mathbf{b} \qquad (1)
\end{aligned}$$

Áp dụng Bài tập 2.29, do vết của $c(I)$ nằm trên mặt cầu nên

$$R^2 + (R'T)^2 = \text{const}. \qquad (2.0.1)$$

Lấy đạo hàm hai vế đẳng thức 2.0.1, ta được

$$\begin{aligned}
&2RR' + 2(R'T)(R'T)' = 0 \\
\Leftrightarrow &\frac{R'}{\tau}\left(\tau R + \tau T(R'T)'\right) = 0 \text{ (do } \tau \neq 0) \\
\Leftrightarrow &R\tau + \tau\frac{1}{\tau}(R'T)' = 0 \\
\Leftrightarrow &R\tau + R'T = 0 \qquad (2)
\end{aligned}$$

Từ (1) & (2) suy ra:

$$\begin{aligned}
&(c + R\mathbf{n} + R'T\mathbf{b})' = 0 \\
\Leftrightarrow &c + R\mathbf{n} + R'T\mathbf{b} = a \text{ (const)} \\
\Leftrightarrow &c - a = -R\mathbf{n} - R'T\mathbf{b}.
\end{aligned}$$

(b) Chứng minh tương tự Bài tập 2.29.

Bài tập 2.31. Giả sử $c_1 \sim c_2$, tức là tồn tại một vi phôi $\gamma : (0, \pi/2) \to (0, 1)$, sao cho $c_2(t) = (c_1\gamma)(t)$, $\forall t \in (0, \pi/2)$. Khi đó, ta có

$$\begin{cases} \sqrt{\cos t} = \gamma(t) \\ \sin t = 1 - \gamma^2(t) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos t = \gamma^2(t) \\ \sin t = 1 - \cos t \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos t = \gamma^2(t) & (1) \\ \sin t + \cos(t) = 1. & (2) \end{cases}$$

Do phương trình (2) không có nghiệm với mọi $t \in (0, \pi/2)$ nên c_1 và c_2 là không tương.

Chứng minh tương tự cho các trường hợp còn lại.

Bài tập 2.32. Gọi $\vec{a}$ là vector chỉ phương của đường thẳng và $\theta(t)$ là góc giữa hai vector $\vec{a}$ và $\alpha'(t)$.

Giả sử $\theta = \text{const}$, tức là $\mathbf{t}.\vec{a} = \text{const}$, suy ra $\mathbf{n}.\vec{a} = 0$. Do đó

$$\vec{a} = \mathbf{t}\cos\theta + \mathbf{b}.\sin\theta.$$

Lấy đạo hàm hai vế ta được

$$k.\mathbf{n}.\cos\theta + \tau\mathbf{n}.\sin\theta = 0$$
$$\Longrightarrow \frac{k}{\tau} = -\tan\theta = \text{const}$$

Ngược lại, nếu $\dfrac{k}{\tau} = \text{const} = -\tan\theta$ thì chứng minh được

$$\vec{a} = \mathbf{t}\cos\theta + \mathbf{b}.\sin\theta.$$

Bài tập 2.33. Giả sử $s = 0$, xét biểu diễn của của α trong lân cận của $s = 0$. Khi đó P phải có dạng $z = cy$ hay $y = 0$. Mặt phẳng $(P) : y = 0$ không thỏa mãn điều kiện thứ 2 của đề bài. Bây giờ xét trong lân cận rất nhỏ của s sao cho $y(s) > 0$ và $z(s)$ cùng dấu với s. Theo điều kiện thứ hai $c = z/y$ vừa dương lại vừa âm, do đó P là mặt phẳng có phương trình $z = 0$.

Bài tập 2.34.

(a) Xem Bài tập 2.32

(b) Theo chứng minh của Câu (a), vector $\vec{a}$ vuông góc với $\mathbf{n}$ nên pháp tuyến song song với mặt phẳng nhận vector $\vec{a}$ làm pháp vector.

(c) Nếu θ là góc giữa $\vec{a}$ và tiếp tuyến thì vector trùng pháp tuyến $\mathbf{b}$ tạo với vector $\vec{a}$ một góc $\pi/2 - \theta$.

Bài tập 2.35. Sử dụng cơ sở địa phương.

Bài tập 2.36. Ma trận của một phép biến đổi đẳng cự có định thức bằng ± 1 và công thức đổi biến của tích phân bội.

Bài tập 2.37. Giả sử α là tham số hóa với tham số độ dài cung và $a \in \mathbb{R}^3$ là điểm cố định.

Theo đề bài ta được

$$\begin{aligned} &(\alpha(t) - a).\alpha^{'}(t) = 0 \\ \Rightarrow &\Big(\big(\alpha(t) - a\big)^2\Big)^{'} = 0 \\ \Rightarrow &\big(\alpha(t) - a\big)^2 = r^2 \end{aligned}$$

Suy ra vết của (α) là đường tròn hoặc một phần đường tròn tâm a bán kính r.

Bài tập 2.38.

(a) Đường cong phẳng.

(b) Đường xoắn ốc.

(c) Đường thẳng hoặc một phần của đường thẳng.

Bài tập 2.39. Các tính chất này tương đương với điều kiện đường xoắn ốc tổng quát.

Bài tập 2.40. Tương tự Bài tập 2.24.

Bài tập 2.41.

(a) Đường tractrix có phương trình tham số là

$$c(t) = \Big(\sin t, \cos t + \ln\tan\Big(\frac{t}{2}\Big)\Big)$$

Ta có

$$\begin{aligned} x(t) &= \sin t \Longrightarrow x^{'}(t) = \cos t;\ x^{''}(t) = -\sin t \\ y(t) &= \cos t + \ln\tan\frac{t}{2} \\ \Longrightarrow y^{'}(t) &= \frac{\cos^2 t}{\sin t};\ y^{''}(t) = -\cos t - \frac{\cos t}{\sin^2(t)}. \end{aligned}$$

Gọi $\beta(t) = (X, Y)$ là đường túc bế của α thì β có phương trình tham số là

$$\begin{cases} X = x - \dfrac{x^{'2} + y^{'2}}{x^{'}y^{''} - x^{''}y^{'}}.y^{'} \\ Y = y + \dfrac{x^{'2} + y^{'2}}{x^{'}y^{''} - x^{''}y^{'}}.x^{'} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = \dfrac{1}{\sin t} \\ Y = \ln\left(\tan\dfrac{t}{2}\right) \end{cases}$$

(b) Đường Hypebol có phương trình tham số hóa là:

$$c(t) : \begin{cases} x = a\cosh t \\ y = b\sinh t \end{cases}$$

$x^{'}(t) = a\sinh t; x^{''}(t) = a\cosh t$

$y^{'}(t) = b\cosh t; y^{''}(t) = b\sinh t$

Do đó $c(t)$ có đường túc bế β được xác định như sau:

$$\begin{cases} X = x - \dfrac{x^{'2} + y^{'2}}{x^{'}y^{''} - x^{''}y^{'}}.y^{'} \\ Y = y + \dfrac{x^{'2} + y^{'2}}{x^{'}y^{''} - x^{''}y^{'}}.x^{'} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = a\cosh t.(1 + \cosh 2t) \\ Y = b\sinh t.\left(1 - \dfrac{a^2}{b^2}\cosh 2t\right) \end{cases}$$

Nếu β là đường túc bế của $c(t)$ thì $c(t)$ là đường thân khai của $\beta(t)$.

(c) Đường cycloid $c(t) = \big(R(t - \sin t), R(1 - \cos t)\big)$

$x^{'}(t) = R(1 - \cos t);\ x^{''}(t) = R\sin t$

$y^{'}(t) = R\sin t;\ y^{''}(t) = R\cos t)$

β là đường túc bế của c thì β có phương trình tham số là

$$\begin{cases} X = R(t + \sin t) \\ Y = -R(1 - \cos t) \end{cases}$$

Bài tập 2.42.

(a) Ta có

$$\begin{aligned} k &= \frac{x'y - xy'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\cosh t}{\left(1 + \sinh^2 t\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\cosh^2 t}. \end{aligned}$$

(b) Theo công thức xác định tham số hóa của túc bế

$$\begin{cases} X = x - \dfrac{x'^2 + y'^2}{x'y - xy'} y' \\ Y = y + \dfrac{x'^2 + y'^2}{x'y - xy'} x' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = t - \sinh t \cosh t \\ Y = 2\cosh t \end{cases}$$

Bài tập 2.43. Ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ có tham số hóa là

$$\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = b\sin t \end{cases} \qquad t \in (0, 2\pi).$$

Các đỉnh nó ứng với các giá trị $t = \pi/2, \pi, 3\pi/2$. Từ đó, chúng ta xác định được các độ cong tương ứng là $b/a^2,\ a/b^2$.

Bài tập 2.44. Với đường cong $c(t) = \big(\varphi(t), t\varphi(t)\big)$, ta có

$$\begin{aligned} c'(t) &= (\varphi'(t), \varphi(t) + t\varphi'(t)) \\ c''(t) &= (\varphi''(t), 2\varphi'(t) + t\varphi''(t)) \end{aligned}$$

Đường cong c là một cung thẳng khi và chỉ khi $k = 0$. Điều này tương đương với đẳng thức sau:

$$\begin{aligned} &\varphi'(t)(2\varphi'(t) + t\varphi''(t)) - \varphi''(t)(\varphi(t) + t\varphi'(t)) = 0 \\ \Longleftrightarrow &2\varphi'^2(t) + t.\varphi'(t).\varphi''(t) - \varphi''(t).\varphi(t) - t.\varphi'(t).\varphi''(t) = 0 \\ \Longleftrightarrow &2\varphi'^2(t) - \varphi''(t).\varphi(t) = 0 \end{aligned}$$

Nếu tồn tại $t_0 \in I$ sao cho $\varphi(t_0) = 0$ thì c không chính qui tại t_0. Do đo chúng ta có:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\varphi(t)}\right)'' &= \left(-\frac{\varphi'(t)}{\varphi^2(t)}\right)' = \frac{-\varphi''(t)\varphi^2(t) + 2\varphi(t)\varphi'^2(t)}{\varphi^4(t)} \\ &= \frac{-\varphi''(t)\varphi(t) + 2\varphi'(t)}{\varphi^3(t)} = 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{\varphi(t)} &= at + b \Rightarrow \varphi(t) = \frac{1}{at+b}\end{aligned}$$

Vậy với $\varphi(t) = \dfrac{1}{at+b}$ thì c là một cung thẳng.

Bài tập 2.45. Sinh viên tự giải.

Bài tập 2.46. Tìm biểu thức tọa độ của π đối với mục tiêu $\{\alpha(t) : \mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)\}$.

Bài tập 2.47. Giả sử đường cong đã cho có tham số hóa tự nhiên. Khi đó $x = \cos\varphi$ và $y = \sin\varphi$. Sử dụng công thức tính độ cong đại số để thiết lập phương trình vi phân thường theo φ.

Bài tập 2.48. Sử dụng biểu thức quan hệ giữa hệ tọa độ cực và hệ tọa độ Decarter:

$$\begin{cases} x = \rho(\theta)\cos\theta \\ y = \rho(\theta)\sin\theta \end{cases}$$

Thay các đẳng thức trên vào công thức tính độ dài và độ cong đại số.

Bài tập 2.49. Sử dụng bất đẳng thức đẳng cho $l^2 \geq 4\pi A$. Suy ra không tồn tại đường cong.

Bài tập 2.50. Đối xứng miền đã cho qua AB và sử dụng kết quả bài toán đẳng cho để suy ra l chính là nửa đường tròn đường kính AB.

Bài tập 2.51. Tính toán trực tiếp.

Bài tập 2.52. Do α là một đường cong đơn đóng nên ta có

$$\int_0^l k(s)ds = \theta(l) = \theta(0) = 2\pi.$$

Do $k(s) < c$, nên ta có

$$2\pi = \int_0^l k(s)ds \leq \int_0^l cds = cl$$

Từ đó suy ra $l \geq 2\pi/c$.

Bài tập 2.53. Theo định lý Jordan về đường cong thì α bao một tập hợp K. Nếu K là một tập không lồi thì tồn tại hai điểm $p, q \in K$ sao cho đoạn thẳng pq chứa một số điểm không nằm trong K. Khi đó đoạn thẳng pq cắt α tại một điểm $r \neq p, q$. Chứng minh rằng qp là một tiếp tuyến của α tại các điểm p, q, r, từ đó dẫn đến một điều mâu thuẩn.

Bài tập 2.54. Nếu đường cong α là lõm thì lấy hai điểm p, q nằm hai phía của phần lõm đó. Di chuyển hai điểm p, q về phía lõm sao cho pq trở thành tiếp tuyến tại p và q. Chứng minh đường cong thu được giảm chiều dài tăng diện tích.

Bài tập 2.55.

(a) Gọi L là đường thẳng qua điểm $q \in \alpha(I)$. Nếu vết của α nằm một phía của L thì đường thẳng L là một tiếp tuyến. Nếu vết của nó nằm hai phía so với L thì α sẽ cắt L tại điểm thứ hai.

(b) Chứng minh tương tự như chứng minh hàm Cauchy-Crofton.

BÀI TẬP CHƯƠNG 3

Bài tập 3.1. Xét $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \longmapsto x^2 + y^2$. Khi đó, ta có

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Vậy f có giá trị tới hạn là duy nhất là 0. Suy ra C là một mặt chính qui.

Có thể chọn họ bản đồ

$$f_1 : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (u, v) \longmapsto (\cos u, \sin u, v)$$
$$f_2 : (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (u, v) \longmapsto (\sin u, \cos u, v)$$

Khi đó hệ $\Big\{\big((0, 2\pi) \times \mathbb{R}, f_1\big), \big((-\pi, \pi) \times \mathbb{R}, f_2\big)\Big\}$ là một họ bản đồ phủ C. Lưu ý họ này không duy nhất.

Bài tập 3.2. Tập $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ z = 0,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ không phải là mặt chính qui. Tập $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ z = 0,\ x^2 + y^2 < 1\}$ là mặt chính qui.

Bài tập 3.3. Dễ thấy $(0, y, z)$ là các điểm tới hạn của f và $f^{-1}(0)$ là mặt phẳng Oyz nên nó là mặt chính qui.

Bài tập 3.4. Rõ ràng X thỏa mãn các điều kiện: khả vi, đồng phôi (do $x > y$).

Ta sẽ chứng minh X là đơn ánh

Giả sử $X(u_1, v_1) = X(u_2, v_2)$. Từ biểu thức của X ta thấy $\{u_1, v_1\}$ và $\{u_2, v_2\}$ là trùng nhau vì cùng là nghiệm của phương trình bậc hai $X^2 - (u+v)X + uv = 0$. Nhưng $u_1 > v_1$ và $u_2 > v_2$ nên ta có $u_1 = u_2$ và $v_1 = v_2$.

Vậy X là đơn ánh. Do đó X là một tham số hóa của một mặt chính qui.

Bài tập 3.5.

(a) Ta có

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2(x+y+z-1) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2(x+y+z-1) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = 2(x+y+z-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x+y+z-1=0$$

Vậy các điểm tới hạn của f là mặt phẳng $(P) x+y+z-1=0$.

(b) Nếu $c \neq 0$ thì c là một giá trị chính qui của f. Suy ra $f(x,y,z) = c$ là một mặt chính quy. Nếu $c = 0$ thì $f(x,y,z) = c \Longleftrightarrow x+y+z-1=0$.

Do đó khi $c = 0$ thì những điểm $M(x,y,z)$ thỏa $f(x,y,z) = c$ cũng là 1 mặt chính quy.

Tóm lại với mọi $c \in \mathbb{R}$ thì $f^{-1}(c)$ là một mặt chính qui.

(c) Ta có

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = yz^2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = xz^2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 2xyz = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 0 \\ x = y = 0 \end{array} \right.$$

Vậy tập hợp tất cả các điểm tới hạn nằm trên mặt phẳng $z = 0$ và đường thẳng $x = y = 0$. Từ đó, suy ra f có giá tới hạn duy nhất là 0.

Nếu $c \neq 0$ thì tập hợp các điểm $M(x,y,z)$ thỏa $f(x,y,z) = c$ là một mặt chính qui.

Nếu $c = 0$ thì tập các điểm$M(x,y,z)$ thỏa $f(x,y,z) = 0$ không phải là một mặt chính qui (do tại $O(0,0,0)$ không trơn).

Bài tập 3.6. Sinh viên tự giải.

Bài tập 3.7. Xét ánh xạ $X : V \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(u,v) \longmapsto (u,v,0)$. Khi đó (V,X) là một bản đồ của S. Do đó, tập đã cho là một mặt chính qui.

Bài tập 3.8. Xét ánh xạ $f(x,y,z) = x^2 - y^2 - z$, chứng minh $(0,0,0)$ là một giá trị chính qui. Từ đó suy ra S là một mặt chính qui.

Xét $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(u,v) \mapsto (u,v,u^2-v^2)$. Khi đó x,y,z là các hàm khả vi. Mặt khác, ta có $X_u = (1,0,2u), X_v = (0,1,-2v)$ độc lập tuyến tính do

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Do đó X là một tham số hóa.

(a) Ta thấy

$$\lim_{\substack{u\to-\infty \\ v\to-\infty}} x(u,v) = -\infty, \quad \lim_{\substack{u\to+\infty \\ v\to+\infty}} x(u,v) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{u\to-\infty \\ v\to-\infty}} y(u,v) = -\infty, \quad \lim_{\substack{u\to+\infty \\ v\to+\infty}} y(u,v) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{u\to-\infty \\ v\to 0}} z(u,v) = +\infty, \quad \lim_{\substack{u\to 0 \\ v\to+\infty}} z(u,v) = -\infty$$

(b) Tham số này phủ phần $S \cap \{\mathbb{R}^3 : z > 0\}$.

Bài tập 3.9. $X(u,v) = (a\sinh u\cos v, a\sinh u\sin v, c\cosh u)$.

Bài tập 3.10. S không phải là mặt chính qui do nó có 1 đường thẳng kì dị.

Bài tập 3.11. Chứng minh trực tiếp. Các đường cong $X(\mathrm{const}, \mathrm{v})$ là giao của S với mặt phẳng $z = c\cos u$.

Bài tập 3.12. $X(u,v) = (0,0,bu) + \big((a,bu,0) - (0,0,bu)\big)v = \big(av, buv, bu(1 - v)\big)$. (S) là một mặt chính qui.

Bài tập 3.13.

(a) Tính toán trực tiếp.

(b) Dùng phép chiếu từ cực bắc và cực nam lên mặt phẳng $\mathbb{R}^2$.

Bài tập 3.14.

(a) Chứng minh tương tự như mặt chính qui.

(b) Tương tự như Câu (a)

(c) Không chính qui tại O.

Bài tập 3.15. Dễ thấy $A^2 = id_{\mathbb{S}^2}$ nên $A = A^{-1}$.

Bài tập 3.16. $f(x,y) = x^2 + y^2$. Khi đó f biến mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ thành parabolid.

Bài tập 3.17. Xét $f : (E) \longrightarrow (S), (x,y,z) \longmapsto (x/a, y/b, z/c)$.

Bài tập 3.18. Chứng minh theo định nghĩa.

Bài tập 3.19. Sử dụng tính chất khả vi của phép đổi tham số.

Bài tập 3.20. Kiểm tra trực tiếp 3 điều kiện phản xạ, đối xứng, bắc cầu.

Bài tập 3.21. Chứng minh trực tiếp.

Bài tập 3.22. Nếu $p = (x, y, z)$ thì $F(p)$ nằm trên giao của H với đường thẳng $t \longmapsto (tx, ty, z)$, $t > 0$. Do đó

$$F(p) = \Big(\frac{\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}x, \frac{\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}y, z\Big)$$

Chọn U là toàn bộ trừ đi trục Oz. Khi đó hàm $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ xác định như trên là một hàm khả vi.

Bài tập 3.23. Đường cong C chỉ có các điểm kì dị nằm trên trục quay.

Bài tập 3.24. Chứng minh trực tiếp bằng định nghĩa.

Bài tập 3.25. Sinh viên tự giải.

Bài tập 3.26. Sử dụng định nghĩa của hàm khả vi trên $\mathbb{R}^3$ và trên mặt chính qui để chứng minh.

Nếu f là thu hẹp của một ánh xạ khả vi thì f khả vi (ví dụ). Để chứng minh điều ngược lại, chúng ta xét $X : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ là một tham số hóa của S tại p. Chúng ta có thể mở rộng X thành ánh xạ $F : U \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Lấy W là một lân cận của p trong $\mathbb{R}^3$ sao cho F^{-1} là một vi phôi trên nó. Định nghĩa hàm $g : W \longrightarrow \mathbb{R}$ được xác định bởi $g = f \circ X \circ \pi \circ F^{-1}$ trên W, với π là phép chiếu tự nhiên từ $U \times \mathbb{R}$ lên U. Khi đó, g là một ánh xạ khả vi và $g|_{W \cap S} = f$.

Bài tập 3.27. Sinh viên tự giải.

Bài tập 3.28. Ánh xạ F khả vi trên $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$, do nó là hợp của các ánh xạ khả vi. Để chứng minh F khả vi tại N, xét phép chiếu nổi từ cực nam và đặt $Q = \pi_S \circ F \circ \pi_S^{-1}$. Chứng minh rằng $\pi_N \circ \pi_S^{-1}(\xi) = 4/\xi$. Từ đó ta có

$$Q(\xi) = \frac{\xi^n}{\overline{a}_0 + \overline{a}_1\xi + \cdots + \overline{a}_n\xi^n}.$$

Do đó, Q khả vi tại 0. Suy ra $F = \pi_S^{-1} \circ F \circ \pi_S$ khả vi tại S.

Bài tập 3.29. Với mọi $\overrightarrow{v} \in T_pS$, ta có $\overrightarrow{v} = \alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ với $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ là một đường cong nằm trên S và $\alpha(0) = p$.

Do $\alpha(t)$ nằm trên S nên $f(\alpha(t)) = 0$. Tức là ta có:

$$
\begin{aligned}
& f(x(t), y(t), z(t)) = 0, \forall t \in I \\
\Longrightarrow & f'_x(p)x'(0) + f'_y(p)y'(0) + f'_z(p)z'(0) = 0 \\
\Longrightarrow & \vec{n}(f'_x(p), f'_y(p), f'_z(p)) \perp \vec{v} \\
\Longrightarrow & (TpS) : f'_x(p)(x - x_0) + f'_y(p)(y - y_0) + f'_z(p)(z - z_0) = 0.
\end{aligned}
$$

Bài tập 3.30. Phương trình mặt phẳng tiếp xúc tại $(a, b, 0)$ của mặt phẳng chính qui cho bởi phương trình $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1 =$ có dạng

$$
\begin{aligned}
T_pS : & f'_x(p)(x - a) + f'_y(p)(y - b) + f'_z(p)(z - 0) = 0 \\
\Leftrightarrow & 2a(x - a) + 2b(y - b) = 0 \\
\Leftrightarrow & 2ax + 2bx - 2a^2 - 2b^2 = 0.
\end{aligned}
$$

Pháp vector của (TpS) là $\vec{n} = (2a, 2b, 0)$ vuông góc với $\vec{e}_3$. Suy ra mặt phẳng (T_pS) vuông góc với trục Oz.

Bài tập 3.31.

Có thể xem S là $F^{-1}(0)$ với $F(x, y, z) = z - f(x, y)$ hoặc giải theo cách sau.

(a) Tham số hóa của S là $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$. Khi đó chúng ta có

$$X_u = (1, 0, f_u), \quad X_v = (0, 1, f_v)$$

Suy ra $\vec{n} = (-f_u, -f_v, 1)$.

Phương trình mặt phẳng tiếp xúc của S tại $p = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ với có dạng

$$
\begin{aligned}
& f'_u(p)(x - x_0) + f'_v(p)(y - y_0) + (z - f(x_0, y_0)) = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & z = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0))
\end{aligned}
$$

(b) Ta có $F = Df_q(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(q)x + \dfrac{\partial f}{\partial y}(q)y$. Suy ra

$$\mathrm{Gr(F)} = \left\{ \left(\mathrm{x, y}, \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}}(\mathrm{q})\mathrm{x} + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}}(\mathrm{q})\mathrm{y} \right) :\ (\mathrm{x, y}) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài tập 3.32. Áp dụng Bài tập 3.31.

Bài tập 3.33. Ta có $X(u, v) = \alpha(u) + \beta(v)$

Đường tọa độ thứ I: $X(t, c),\ t \in I$.

Đặt $p = X(u, c)$. Khi đó ta được

$$X_u = \alpha'(u),\ X_v = \beta'(v)$$
$$\Longrightarrow N(p) = \alpha'(u) \wedge \beta'(c)$$

Suy ra các mặt phẳng tiếp xúc của (S) dọc theo đường tọa độ thứ I song song với các đường thẳng có vector chỉ phương là $\beta'(c)$.

Trường hợp thứ hai chứng minh tương tự.

Bài tập 3.34. Đặt $p_1 = X(u_0, v_1)$; $p_2 = X(u_0, v_2)$

Ta sẽ chứng minh $T_{P_1}S = T_{P_2}S$. Thật vậy

$$\begin{aligned} X_u &= \alpha'(u) + v\alpha''(u),\ X_v = \alpha'(u) \\ \Longrightarrow X_u \wedge X_v &= (\alpha'(u) + v\alpha(u)) \wedge \alpha'(u) \\ &= \alpha'(u) \wedge \alpha'(u) + v\alpha''(u) \wedge \alpha'(u) \\ &= v\alpha''(u) \wedge \alpha'(u). \end{aligned}$$

Suy ra

$$T_{p_1}S:\ v_1.(\alpha(u_0) \wedge \alpha'(u_0))\,(\alpha(u) + v\alpha'(u) - \alpha(u_0) - v_1\alpha'(u_0)) = 0$$

Tính toán tương tự, chúng ta được

$$T_{p_2}S: v_2\big(\alpha(u_0) \wedge \alpha'(u_0)\big)\,(\alpha(u) + v\alpha'(u) - \alpha(u_0) - v_2\alpha'(u_0)) = 0.$$

Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned} &v_1.(\alpha(u_0) \wedge \alpha'(u_0))\,[\alpha(u_0) + v_2\alpha'(u_0) - \alpha(u_0) - v_1\alpha'(u_0)] = \\ &= v_1.(\alpha(u_0) \wedge \alpha'(u_0)).(v_2 - v_1).\alpha'(u_0) \\ &= v_1.(v_2 - v_1)\,[(\alpha(u_0) \wedge \alpha'(u_0)).\alpha'(u_0)] \\ &= v_1.(v_2 - v_1)\,(\alpha(u_0), \alpha'(u_0), \alpha'(u_0)) = 0 \end{aligned}$$

Suy ra p_2 là một điểm của $T_{p_1}S$. Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Bài tập 3.35. Lấy $v \in T_PS$, $\alpha(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$, $\alpha(0) = p, \alpha'(0) = v$.

Ta có: $f \circ \alpha(t) = (\alpha(t) - p_0)^2$.

Do đó

$$\begin{aligned} Df_p(v) &= \frac{d}{dt}[f \circ \alpha(t)]_{t=0} \\ &= 2\alpha'(0)(\alpha(0) - p_0) = 2v(p - p_0),\ \forall v \in T_PS. \end{aligned}$$

Bài tập 3.36. Sinh viên tự giải.

Bài tập 3.37. Tính toán trên Maple

```
with(LinearAlgebra);
X := [v*cos(u), v*sin(u), a*u];
XU := convert(diff(X, u), Vector);
XV := convert(diff(X, v), Vector);
N := simplify(`&x`(XU, XV));
X := convert([x, y, z]-X, Vector);
`assuming`([simplify(X.N)],
[x > 0, y > 0, z > 0, 0 < u and u < 2*Pi, a > 0]);
```

Mặt phẳng tiếp xúc cần tìm có phương trình

$$-a\sin(u_0)\,x + a\cos(u_0)\,y + vau - vz = 0$$

Bài tập 3.38. Ta có

$$\begin{aligned}
X_s &= \alpha'(s) + r(n'(s)\cos v + b'(s)\sin v)\\
X_v &= r(-n(s)\sin v + b(s)\cos v)\\
\Longrightarrow N(s,v) &= X_s \wedge X_v\\
&= (\alpha'(s) + r(n'(s)\cos v + b'(s)\sin v) \wedge \big(r(-n(s)\sin v + b(s)\cos v)\big)\\
&= [T + r(-k.T+)\cos v + (-.N)\sin v][r(-n\sin v + b\cos v)]\\
&= -TrN\sin v + TB\cos v + r(kT\cos vN\sin v) + r(-k.TB)\cos v\\
&\quad + r(-\tau.B\cos vN.\sin v) + r(\tau.BB)\cos v - r(NN)\sin v + r(N.\sin vB.\cos v)
\end{aligned}$$

Sử dụng công thức Frenet ta suy ra điều phải chứng minh.

Bài tập 3.39. Ta có

$$\begin{aligned}
X_u &= (f^{'}(u)\cos v, f^{'}(u)\sin v, g^{'}(u));\\
X_v &= (-f(u)\sin v, f(u)\cos v, 0);
\end{aligned}$$

Suy ra phương trình pháp tuyến của S là

$$\begin{cases} f^{'}(u_0)\cos v_0(x-x_0)+f^{'}(u_0)\sin v_0(y-y_0)+g^{'}(u_0)(z-z_0)=0 \\ -f(u_0)\sin v_0(x-x_0)+f(u_0)\cos v_0(y-y_0)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f^{'}(u_0)\cos v_0(x-x_0)+f^{'}(u_0)\sin v_0(y-y_0)+g^{'}(u_0)(z-z_0)=0 \\ (-f(u_0)\sin v_0)x+(f(u_0)\cos v_0)y=0 \end{cases}$$

Dễ thấy hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} f^{'}(u_0)\cos v_0(x-x_0)+f^{'}(u_0)\sin v_0(y-y_0)+g^{'}(u_0)(z-z_0)=0 \\ (-f(u_0)\sin v_0)x+(f(u_0)\cos v_0)y=0 \\ x=0,\ y=0 \end{cases}$$

Suy ra pháp tuyến của S luôn cắt trục Oz.

Bài tập 3.40. Những điểm $p=(x_0,y_0,z_0)$ thuộc giao tuyến của hai mặt S_1 và S_2 có tính chất $ax_0=by_0$.

Pháp vector của S_1 tại điểm p là $n_1=(2x_0-a,2y_0,2z_0)$; còn pháp vector của S_2 tại điểm p là $n_2=(2x_0,2y_0-b,2z_0)$. Từ đó suy ra $n_1\perp n_2$.

Bài tập 3.41.

(a) Lấy $\alpha(t)$ là đường cong nằm trên mặt S sao cho $\alpha(0)=p$ và $\alpha'(0)=\vec{v}$. Khi đó, ta có

$$Df_p(w)=\frac{\langle w,\alpha(t)-\alpha(0)\rangle}{|\alpha(t)-\alpha(0)|}=0$$

Suy ra p là một điểm tới hạn của f khi và chỉ khi $Df_p(w)=0$. Ta suy ra được điều phải chứng minh.

(b) Tương tự câu (a).

Bài tập 3.42.

(a) Sử dụng tính chất liên tục của hàm f, chứng minh trong mỗi khoảng $(-\infty,c)$, (c,b), (b,a) chứa một nghiệm của f.

(b) Điều kiện cần và đủ để hai mặt $f(t_1)=1$ và $f(t_2)=1$ trực giao với nhau:

$$f_x(t_1)f_x(t_2)+f_y(t_1)f_y(t_2)+f_z(t_1)f_z(t_2)=0$$

Sử dụng định nghĩa của hàm f và các t_i suy ra điều phải chứng minh.

Bài tập 3.43. Chứng minh rằng $d(X(u,v), I) = \text{const}$ từ giả thuyết

$$(X - I).X_u = (X - I).X_v = 0$$

Từ đó suy ra điểm cố định I chính là tâm của mặt cầu.

Bài tập 3.44. Mỗi lân cận địa phương của một mặt chính qui là nghịch ảnh của giá trị chính qui của một hàm khả vi. Do đó ta có thể giả sử $S_1 = f^{-1}(0)$ và $S_2 = g^{-1}(0)$, với 0 là giá trị chính qui của các hàm f và g. Trong lân cận của p, $S_1 \cap S_2$ là nghich ảnh của hàm $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $q \longmapsto (f(q), g(q))$. Do S_1 và S_2 có giao ngang nhau nên hai pháp vector (f_x, f_y, f_z) và (g_x, g_y, g_z) độc lập tuyến tính. Do đó $(0,0)$ là giá trị chính qui của hàm F và $S_1 \cap S_2$ là một đường cong chính qui.

Bài tập 3.45. Chứng minh bằng định nghĩa.

Bài tập 3.46. Sử dụng $X(u,v) = \overline{X}\big(\overline{u}(u,v), \overline{v}(u,v)\big)$ và công thức đạo hàm của hàm hợp.

Bài tập 3.47. Chứng minh rằng các đường cong trên S cắt mặt phẳng (P) tại 1 điểm hoặc nằm trên mặt phẳng (P). Từ đó suy ra (P) là một mặt phẳng tiếp xúc của S.

Bài tập 3.48. Phương trình mặt phẳng tiếp xúc tại điểm (x_0, y_0, z_0) có dạng

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1$$

Đường thẳng (d) vuông góc với mặt phẳng tiếp xúc của có phương trình

$$\frac{xa^2}{x_0} = \frac{yb^2}{y_0} = \frac{zc^2}{z_0}$$

Từ biểu thức trên, chúng ta có

$$\frac{x^2a^2}{xx_0} + \frac{y^2b^2}{yy_0} + \frac{z^2c^2}{zz_0} = \frac{x^2a^2 + y^2b^2 + z^2c^2}{xx_0 + yy_0 + zz_0}$$

Tương tự ta có

$$\frac{xx_0}{x_0^2/a^2} = \frac{yy_0}{y_0^2/a^2} = \frac{zz_0}{z_0^2/a^2} = \frac{xx_0 + yy_0 + zz_0}{1}.$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài tập 3.49. Tương tự như chứng minh của hàm nhiều biến.

Bài tập 3.50. Gọi r là đường thẳng cố định và p là một điểm nằm trên S. Mặt phẳng P_1 chứa điểm p và đường thẳng r, chứa tất cả các pháp tuyến tại các điểm $S \cap P_1$. Xét mặt phẳng P_2 qua điểm p và trực giao với r. Do pháp tuyến đi qua p cắt r nên P_2 độc lập với T_pS. Từ đó suy ra $P_2 \cap S = C$ là một đường cong phẳng chính qui. Hơn nữa $P_1 \cap P_2$ trực giao với $\mathrm{A}T_pS \cap P_2$; Do đó $P_1 \cap P_2$ trực giao với C. Từ đó suy ra các pháp tuyến của C đi qua một điểm cố định $q = r \cap P_2$. Sử dụng tính chất liên thông của S suy ra điều phải chứng minh.

Bài tập 3.51. Sinh viên tự giải.

Bài tập 3.52. Gọi $\vec{v}$ là vector tiếp xúc của C_1 và C_2 tại p, chứng minh rằng $\varphi(C_1)$ và $\varphi(C_2)$ có chung vector chỉ phương là $\overrightarrow{\varphi(v)}$.

Bài tập 3.53. Chọn p là gốc mục tiêu, X_u, X_v là trục hoành và trục tung, $N = X_u \wedge X_v$ là trục cao.

Bài tập 3.54.

(a) Cho $q \in \mathbb{R}$, gọi (U, ψ) là một hệ tọa độ địa phương của S tại $p = \varphi^{-1}(q)$. Nếu q là một giá trị chính qui của hàm $\varphi \circ \psi^{-1}$ thì q được gọi là giá trị chính qui của hàm φ.

(b) Suy ra trực tiếp từ định nghĩa giá trị chính qui và đường cong chính qui.

Bài tập 3.55. Lệnh tính toán với Maple

```
[>restart;
    with(linalg);
    X := [a*sin(u)*cos(v), b*sin(u)*sin(v), c*cos(u)];
    XU := diff(X, u); 1; XV := diff(X, v);
    dk := a > 0, b > 0, c > 0, 0 < u and u < 2*Pi,
              0 < v and v < Pi;
   E = simplify((convert(XU, Vector).convert(XU, Vector)))assuming dk;
   F = simplify((convert(XU, Vector).convert(XV, Vector)))assuming dk;
   G = simplify((convert(XV, Vector).convert(XV, Vector)))assuming dk;
```

(a)
$$E = a^2(\cos(u))^2(\cos(v))^2 + b^2(\cos(u))^2 - b^2$$
$$(\cos(u))^2(\cos(v))^2 + c^2 - c^2(\cos(u))^2$$
$$F = -\cos(u)\cos(v)\sin(u)\sin(v)\left(a^2 - b^2\right)$$
$$G = -(\sin(u))^2\left((\cos(v))^2 a^2 - b^2(\cos(v))^2 - a^2\right)$$

(b)
$$E = 4u^2 + a^2$$
$$F = 0$$
$$G = a^2u^2$$

(c)
$$E = a^2(\cosh(v))^2 + 4u^2 - b^2 + b^2(\cosh(v))^2$$
$$F = \cosh(v)\, u \sinh(v)\left(a^2 + b^2\right)$$
$$G = u^2\left(b^2(\cosh(v))^2 - a^2 + a^2(\cosh(v))^2\right)$$

(d)
$$E = a^2(\cosh(v))^2 + 4u^2 - b^2 + b^2(\cosh(v))^2$$
$$F = \cosh(v)\, u \sinh(v)\left(a^2 + b^2\right)$$
$$G = u^2\left(b^2(\cosh(v))^2 - a^2 + a^2(\cosh(v))^2\right)$$

Bài tập 3.56. Các hệ số của dạng cơ bản thứ nhất

$$E = 16/(u^2 + v^2 + 4)^2$$
$$F = 0$$
$$G = 16/(u^2 + v^2 + 4)^2$$

Bài tập 3.57. Lấy hai đương cong $\alpha_1 = X(u_i, v)$, $i = 1, 2$, đương cong $\beta = X(u, v_0)$. Xác định giao điểm và ta có độ dài của đoạn chắn bằng $\sqrt{2}|u_2 - u_1|$.

Bài tập 3.58. Áp dụng công thức tính diện tích của mặt tham số chính qui theo các hệ số của dạng cơ bản thứ nhất.

Bài tập 3.59. Đó là các mặt tròn xoay có đường sinh là các đường tham số hóa độ dài cung.

Bài tập 3.60. $I = d^2\rho + \rho^2 d^2\theta$.

Bài tập 3.61.

(a) $X(u, v) = (3u\sin v, 3u\cos v, 3u^2),\ u \in \mathbb{R},\ v \in (0, 2\pi)$

(b) $N = (6u^2\sin(v), -6u^2\cos(v), -u)$

(c) Các hệ số dạng cơ bản thứ nhất và thứ hai

$$E = 36\,u^2 + 1, \quad F = 0, \quad G = u^2$$
$$e = -6/\sqrt{36u^2+1}, \quad f = 0, \quad g = -6u^2/\sqrt{36u^2+1}.$$

(d) Độ cong Gauss và độ cong trung bình

$$K = \frac{36}{(36u^2+1)^2}, \quad H = \frac{108u^2}{(36u^2+1)^{(3/2)}}.$$

Bài tập 3.62. Các điểm paraboloic nằm trên đường tròn $X(\pi/2, v)$ và $X(3\pi/2, v)$, các điểm eliptic nằm trên phần $X(u, v), u \in (0, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi)$, phần còn lại chứa các điểm hyperboloic.

Bài tập 3.63.

(a) $K = \dfrac{-1}{(1+2u^2)^2}$ và $H = \dfrac{-1+u^2}{(1+2u^2)^{(3/2)}}$.

(b) $H(0,0) = -1$ và $K(0,0) = -1$. Suy ra $k_1 = k_2$.

Bài tập 3.64.

(a) Tìm tham số hóa của mặt tròn xoay và áp dụng công thức tính diện tích theo các hệ số của dạng cơ bản thứ nhất.

(b) $A = 4\pi^2 Ra$.

Bài tập 3.65. Sử dụng công thức tính diện tích.

Bài tập 3.66. Sinh viên tự giải.

Bài tập 3.67. Chứng minh trực tiếp.

Bài tập 3.68. Chứng minh hàm N liên tục.

Bài tập 3.69. Lấy ví dụ lá Möbius.

Bài tập 3.70. Định hướng trên S_1 được cảm sinh từ φ^{-1}.

Bài tập 3.71. Tương tự bài 3.70.

Bài tập 3.72. Sử dụng bài 3.71.

Bài tập 3.73. Gọi S là một mặt chính qui tiếp xúc với một mặt phẳng dọc theo đường cong α. N là pháp vector của mặt phẳng β dọc theo đường cong α. Suy ra $N = \text{const}$. Ta có:

$$\begin{aligned}
\alpha &= a.X_u + b.X_v \\
\alpha' &= u'(t).X_u + v'(t).X_v \\
\Longrightarrow DN(\alpha'(t)) &= (aN_u + bN_v).(t) \\
&= u'(t)N_u + v'(t).N_v \\
&= N'(\alpha(t)) = N'(t) \\
\Longrightarrow DN(\alpha'(t)) &= N'(t) = 0, \forall \alpha(t) \in \beta \cap S.
\end{aligned}$$

Suy ra $\alpha'(t)$ ứng với giá trị riêng $\lambda = 0$.

Từ đó suy ra $\alpha(t)$ là điểm paraboloic hoặc là điểm phẳng.

Bài tập 3.74. Xem chứng minh công thức Euler.

Bài tập 3.75. Không đúng, ví dụ mặt cầu.

Bài tập 3.76. Chứng minh trực tiếp.

Bài tập 3.77. Sử dụng định nghĩa độ cong pháp dạng.

Bài tập 3.78. Sử dụng công thức tính độ cong chính và phương chính theo các hệ số cơ bản, độ cong Gauss và độ cong trung bình.

Bài tập 3.79.

(a) Nửa mặt cầu dưới không kể đường xích đạo.

(b) Mặt cầu trừ đi cực Bắc và cực Nam.

(c) Mặt cầu trừ đi cực Bắc và cực Nam.

Bài tập 3.80. Sinh viên tự giải.

Bài tập 3.81. Chứng minh vector trùng pháp tuyến của C là hằng.

Bài tập 3.82. Xem ý nghĩa của chỉ đồ Dupin.

Bài tập 3.83. Xét module $|\lambda_1 N_2 - \lambda_2 N_1|$ và sử dụng kết quả $|\sin\theta| = |N_1 \wedge N_2|$ suy ra điều phải chứng minh.

Bài tập 3.84. Sinh viên tự giải.

Bài tập 3.85. Tìm phương chính của tại các điểm nằm trên đường tròn trung tâm của xuyến.

Bài tập 3.86. Tính toán trực tiếp.

Bài tập 3.87. Tham số hóa là $X(u, v) = (u, v, auv)$ và dùng công thức tính các độ cong theo hệ số của dạng cơ bản.

Bài tập 3.88. Tham số hóa là $X(u, v) = (u, v, uv)$ và sử dụng công thức xác định các đường tiệm cận và đường chính khúc.

Bài tập 3.89. Đường tiệm cận $u = \text{const}$ và $v = \text{const}$.

Đường chính $\ln(v + \sqrt{v^2 + c^2}) \pm u = \text{const}$.

Bài tập 3.90. $u \pm v = \text{const}$.

Bài tập 3.91. Tính toán trực tiếp

Bài tập 3.92. Sinh viên tự giải.

Bài tập 3.93. Chứng minh theo định nghĩa.

Bài tập 3.94. Các đường sinh và đường tròn trực giao với trục quay.

Bài tập 3.95. Lấy một mặt cầu chứa một mặt (S) ở phía trong, giảm bán kính của mặt cầu một cách liên tục, xét các lát cắt chuẩn tắc tại các giao điểm của mặt cầu và mặt (S).

Bài tập 3.96. Sinh viên tự giải.

Bài tập 3.97. Không có điểm rốn nếu $a \neq b \neq c$.

Bài tập 3.98. Chứng minh trực tiếp.

Bài tập 3.99. Sử dụng định nghĩa của mặt kẻ, đường thắt và tham số phân bố.

Bài tập 3.100. Sử dụng định nghĩa của đường thắt.

Bài tập 3.101. Sử dụng định nghĩa đường cong chính.

Bài tập 3.102. Sinh viên tự giải.

Bài tập 3.103. Tính toán trực tiếp.

Bài tập 3.104. Mặt phẳng là một mặt cực tiểu nhưng không bị chặn. Do đó nó không compact.

Bài tập 3.105. Tính toán trực tiếp.

Bài tập 3.106. Sử dụng giả thuyết độ cong trung bình của S, S' bằng không để chứng minh độ cong trung bình của mặt đã cho là một mặt cực tiểu.